

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 8 класса
2025–2026 учебный год
Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56**

8.1. Клон 1. Трое рабочих копали ямы. Начальник спросил у каждого, сколько они вместе выкопали ям, и рабочие ответили следующее.

Иван: «Больше десяти».

Пётр: «Больше восемнадцати».

Василий: «Больше пятнадцати».

Сколько могло быть выкопано ям, если известно, что два рабочих сказали правду, а третий солгал? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 16, 17, 18. Решение. Если количество ям больше какого-то числа, то оно больше и всех меньших чисел. Поэтому, если Пётр прав, то правы и Иван с Василием, чего быть не может. Значит, солгал Пётр, и ям было не больше 18, но больше 15.

Клон 2. Три сестры ходили за грибами. Мама спросила у каждой, сколько они вместе собрали грибов, и дети ответили следующее.

Аня: «Больше восьми».

Маша: «Больше двадцати двух».

Ирина: «Больше девятнадцати».

Сколько могло быть собрано грибов, если известно, что две сестры сказали правду, а третья солгала? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 20, 21, 22.

Клон 3. Три одноклассника вернулись в школу с игры в футбол. Учитель спросил у каждого, сколько они вместе забили мячей, и дети ответили следующее.

Семён: «Больше пяти».

Дима: «Больше девяти».

Миша: «Больше шести».

Сколько могло быть забито мячей, если известно, что два одноклассника сказали правду, а третий солгал? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 7, 8, 9.

Клон 4. Три подруги вернулись с прогулки в парке и встретили свою учительницу. Учительница спросила у каждой, сколько они вместе съели пирожных, и дети ответили следующее.

Лена: «Больше четырёх».

Света: «Больше восьми».

Рената: «Больше пяти».

Сколько могло быть съедено пирожных, если известно, что две подруги сказали правду, а третья солгала? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 6, 7, 8.

8.2. Клон 1. Пусть A — двузначное число, не кратное 10, B — трёхзначное число. Известно, что A процентов от B равны 400. Чему могут быть равны A и B ?

Ответ: $A = 64$, $B = 625$. Решение. Можно составить уравнение $\frac{A}{100} \cdot B = 400$. Это означает, что $AB = 40000 = 2^6 \cdot 5^4$, тогда и числа A и B в качестве простых делителей могут иметь только 2 и 5. Если бы A делилось и на 2, и на 5, то оно делилось бы и на 10, что запрещено условием. Значит, A является двузначной степенью двойки или пятерки, варианты: 16, 32, 64, 25. При этом B равно 2500, 1250, 625, 1600 соответственно, условию удовлетворяют $A = 64$ и $B = 625$.

Клон 2. Пусть A — двузначное число, не кратное 10, B — трёхзначное число. Известно, что A процентов от B равны 512. Чему могут быть равны A и B ?

Ответ: $A = 64$, $B = 800$.

Клон 3. Пусть A — двузначное число, не кратное 10, B — трёхзначное число. Известно, что A процентов от B равны 320. Чему могут быть равны A и B ?

Ответ: $A = 64$, $B = 500$.

Клон 4. Пусть A — двузначное число, не кратное 10, B — четырёхзначное число. Известно, что A процентов от B равны 200. Чему могут быть равны A и B ?

Ответ: $A = 16$, $B = 1250$.

8.3. Клон 1. Вася нарисовал в тетради четырёхугольник, а затем измерил линейкой четыре его стороны и одну из диагоналей. У него получилось пять чисел. Вася записал их по возрастанию. Оказалось, что это числа 1; 2; 2.8; 5; 7.5. Какое из этих пяти чисел может являться длиной диагонали?

Ответ: 2.8. Решение. Из данных пяти чисел неравенству треугольника удовлетворяют только два набора сторон: 1, 2, 2.8 и 2.8, 5, 7.5. Докажем это. С 7.5 можно взять только 2.8 и 5, все остальные пары в сумме будут давать не больше 7, а нужно хотя бы 7.5. Если не брать 7.5, но брать 5, то любая пара чисел из оставшихся даст не больше 4.8, а нужно хотя бы 5, не подходит. Если не брать ни 7.5, ни 5, то остаётся только набор 1, 2, 2.8, и он подходит. Из измеренных Васей отрезков как раз составляются ровно два треугольника, и оба содержат диагональ, значит, её длина должна повторяться в наборах длин сторон. Число 2.8 участвует в двух наборах, значит, это и есть длина диагонали.

Клон 2. Саша нарисовал в тетради четырёхугольник, а затем измерил линейкой четыре его стороны и одну из диагоналей. У него получилось пять чисел. Саша записал их по возрастанию. Оказалось, что это числа 1; 3; 3.6; 7; 10.2. Какое из этих пяти чисел может являться длиной диагонали?

Ответ: 3.6.

Клон 3. Даша нарисовала в тетради четырёхугольник, а затем измерила линейкой четыре его стороны и одну из диагоналей. У неё получилось пять чисел. Даша записала их по возрастанию. Оказалось, что это числа 2; 3; 4.3; 8; 12.1. Какое из этих пяти чисел может являться длиной диагонали?

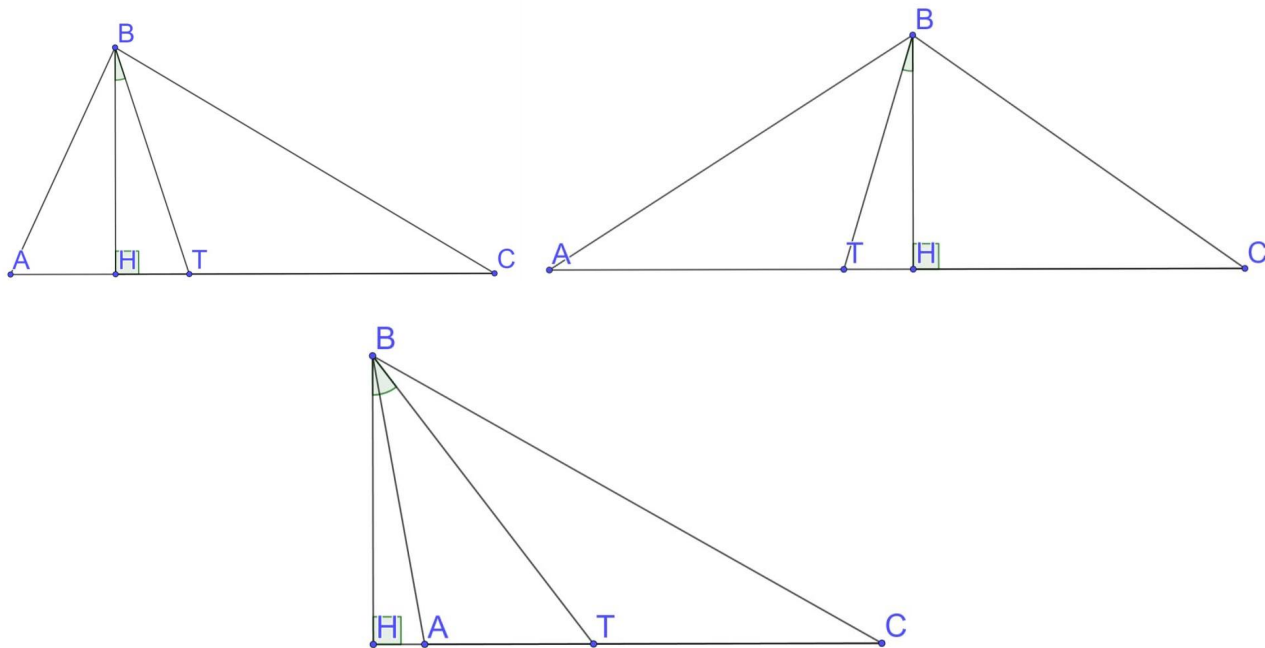
Ответ: 4.3.

Клон 4. Катя нарисовала в тетради четырёхугольник, а затем измерила линейкой четыре его стороны и одну из диагоналей. У неё получилось пять чисел. Катя записала их по возрастанию. Оказалось, что это числа 1; 4; 4.6; 9; 13.3. Какое из этих пяти чисел может являться длиной диагонали?

Ответ: 4.6.

8.4. Клон 1. В треугольнике ABC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины B , равен 20° , а угол C равен 35° . Найдите угол A . Ответ выразите в градусах. Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 75° . Решение. Если высота лежит внутри треугольника, то возможно два варианта: либо основание высоты H ближе к вершине A , а основание биссектрисы T — к вершине C , либо наоборот. Если высота вне треугольника, то её основание точно на продолжении стороны AC за точку A , так как угол C острый. Значит, возможно три конфигурации (см. рис.). Третья невозможна, так как в прямоугольном треугольнике CBH угол B равен $\angle CBT + \angle TBA + \angle ABH = 2 \cdot \angle TBA + \angle ABH = \angle TBH + \angle TBA$, а это меньше удвоенного угла TBH , то есть меньше 40° , тогда сумма острых углов прямоугольного треугольника CBH меньше 75° . Вторая тоже невозможна, так как половина угла B треугольника ABC равна $\angle TBH + \angle HBC = 20^\circ + (90^\circ - 35^\circ) = 75^\circ$, но тогда сам угол B равен 150° и в сумме с углом C уже даёт больше 180° . Значит, возможна только первая конфигурация. Там половина угла B треугольника ABC равна $\angle TBC = \angle HBC - \angle HBT$, то есть половина угла B на 20° меньше, чем угол HBC , поэтому равна $90^\circ - 35^\circ - 20^\circ = 35^\circ$, откуда весь угол B равен 70° , и тогда на угол A остается $180^\circ - 35^\circ - 70^\circ = 75^\circ$.



Клон 2. В треугольнике ABC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины B , равен 15° , а угол C равен 25° . Найдите угол A . Ответ выразите в градусах. Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 55° .

Клон 3. В треугольнике ABC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины B , равен 30° , а угол C равен 20° . Найдите угол A . Ответ выразите в градусах. Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 80° .

Клон 4. В треугольнике ABC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины B , равен 25° , а угол C равен 15° . Найдите угол A . Ответ выразите в градусах.

сах. Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 65° .

8.5. Клон 1. Антон придумал натуральное число. После этого он вычел из него сумму его цифр. Потом из полученного числа он снова вычел сумму его цифр и так далее. После пятнадцати таких вычитаний впервые получился ноль. Укажите наименьшее и наибольшее число, которое мог придумать Антон.

Ответ: 140, 149. Решение. Число раскладывается в десятичную запись числа в виде суммы цифр, умноженных на соответствующую им степень десятки. Если вычесть оттуда сумму цифр, последняя цифра уничтожится, а остальные будут теперь умножаться на числа, состоящие из девяток. Например, если число имело вид $\overline{abcd}$, то после операции получим $999a + 99b + 9c$. Таким образом, после первого вычитания результат обязательно делится на 9, и дальше тоже всегда будет делиться на 9. Теперь выполним анализ с конца. Чтобы получился 0, все цифры, кроме последней, должны занулиться, значит, на предыдущем шаге было однозначное число, и это может быть только 9, так как оно должно делиться на 9. Чтобы получилось 9, ненулевой допустима только предпоследняя цифра, и то равная 1, значит, на предыдущем шаге было число вида $\overline{1x}$, то есть 18, так как оно должно делиться на 9. Аналогично, до этого были числа 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Число 81 могло получиться либо из 90, либо из 99. Заметим, что 90 не представимо в виде $\dots + 999a + 99b + 9c$, поэтому его получить нельзя. Значит, перед 81 было 99, а перед ним — 108, 117, 126, 135. Осталось узнать, что было перед самым первым вычитанием. Число обязано иметь вид $\overline{14x}$, причём теперь ограничения на делимость на 9 нет, так как оно возникает после выполнения первой операции. Поэтому подходят все числа от 140 до 149.

Клон 2. Сергей придумал натуральное число. После этого он вычел из него сумму его цифр. Потом из полученного числа он снова вычел сумму его цифр и так далее. После двенадцати таких вычитаний впервые получился ноль. Укажите наименьшее и наибольшее число, которое мог придумать Сергей.

Ответ: 110, 119.

Клон 3. Роман придумал натуральное число. После этого он вычел из него сумму его цифр. Потом из полученного числа он снова вычел сумму его цифр и так далее. После тринадцати таких вычитаний впервые получился ноль. Укажите наименьшее и наибольшее число, которое мог придумать Роман.

Ответ: 120, 129.

Клон 4. Даниил придумал натуральное число. После этого он вычел из него сумму его цифр. Потом из полученного числа он снова вычел сумму его цифр и так далее. После четырнадцати таких вычитаний впервые получился ноль. Укажите наименьшее и наибольшее число, которое мог придумать Даниил.

Ответ: 130, 139.

8.6. Клон 1. Некоторое четырёхзначное число является квадратом числа x . Если же цифры этого четырёхзначного числа записать в обратном порядке, то получится квадрат числа y , причём y кратно x и $y > x$. Найдите x .

Ответ: 33. Решение. Представим y в виде $y = kx$, где k — натуральное число, большее 1. С одной стороны, $x^2 + y^2 = (k^2 + 1)x^2$, а с другой, если обозначить $x^2 = \overline{abcd}$ и $y^2 = \overline{dcba}$, то $x^2 + y^2 = 1001(a + d) + 110(b + c)$. Получаем, что $(k^2 + 1)x^2 = 1001(a + d) + 110(b + c)$, что делится на 11, так как и 1001, и 110 делятся. Так как x^2 и y^2 четырёхзначные, то $k^2 < 10$, откуда k равно 2 или 3, рассмотрим оба случая. Если $k = 2$, то $k^2 + 1 = 5$, что взаимно просто с 11, значит, x^2 делится на 11, тогда и x делится на 11, ведь 11 — простое число. Тогда y делится на 22 и может быть равно 22, 44, 66 или 88 (далее квадрат уже будет хотя бы пятизначным). Проверим все эти варианты: $22^2 = 484$ (не четырёхзначное), $44^2 = 1936$ (6391 не квадрат), $66^2 = 4356$ (6534 не квадрат), $88^2 = 7744$ (4477 не квадрат). Если $k = 3$, то $k^2 + 1 = 10$, что взаимно просто с 11, значит, x^2 делится на 11, тогда и x делится на 11, ведь 11 — простое число. Тогда y делится на 33 и может быть равно 33, 66 или 99 (далее квадрат уже будет хотя бы пятизначным). Проверим все эти варианты: $33^2 = 1089$ (9801 больше, а должно быть меньше), $66^2 = 4356$ (6534 не квадрат), $99^2 = 9801$ (подходит, 1089 квадрат). Значит, $y = 99, x = 33$.

Клон 2. Некоторое четырёхзначное число является квадратом числа x . Если же цифры этого четырёхзначного числа записать в обратном порядке, то получится квадрат числа y , причём y кратно x и $y > x$. Найдите y .

Ответ: 99.

Клон 3. Некоторое четырёхзначное число является квадратом числа x . Если же цифры этого четырёхзначного числа записать в обратном порядке, то получится квадрат числа y , причём y кратно x и $y > x$. Найдите y^2 .

Ответ: 9801.

Клон 4. Некоторое четырёхзначное число является квадратом числа x . Если же цифры этого четырёхзначного числа записать в обратном порядке, то получится квадрат числа y , причём y кратно x и $y > x$. Найдите x^2 .

Ответ: 1089.

8.7. Клон 1. На доске записано пятизначное число, состоящее из различных цифр, не равных нулю. Разрешается добавить в это число любую цифру, записав её в любом месте между цифрами данного числа, а также в начале или в конце числа. Сколько различных шестизначных чисел может получиться?

Ответ: 54. Решение. Сначала посчитаем, сколько шестизначных чисел, в которых все пары соседних цифр различны, можно получить. В самое начало можно поставить 8 цифр (за исключением нуля и первой цифры), в следующие 4 промежутка тоже по 8 цифр (за исключением цифр слева и справа), в самый конец можно поставить 9 цифр (за исключением цифры слева). Всего 49 вариантов. Теперь посчитаем, сколько шестизначных чисел с повторяющимися соседними цифрами можно получить. Из пятизначного числа $\overline{abcde}$ можно сделать $\overline{aabcde}$, $\overline{abbcde}$, $\overline{abccde}$, $\overline{abcdde}$, $\overline{abcdee}$, всего 5 вариантов. Значит, итого 54 варианта.

Клон 2. На доске записано шестизначное число, состоящее из различных цифр, не равных нулю. Разрешается добавить в это число любую цифру, записав её в любом месте между цифрами данного числа, а также в начале или в конце числа. Сколько различных семизначных чисел может получиться?

Ответ: 63.

Клон 3. На доске записано семизначное число, состоящее из различных цифр, не равных нулю. Разрешается добавить в это число любую цифру, записав её в любом месте между цифрами данного числа, а также в начале или в конце числа. Сколько различных восьмизначных чисел может получиться?

Ответ: 72.

Клон 4. На доске записано восьмизначное число, состоящее из различных цифр, не равных нулю. Разрешается добавить в это число любую цифру, записав её в любом месте между цифрами данного числа, а также в начале или в конце числа. Сколько различных девятизначных чисел может получиться?

Ответ: 81.

8.8. Клон 1. Найдите все натуральные $n < 70$, для которых оба числа $\frac{n+15}{n}$ и $\frac{n}{n+15}$ записываются в виде конечных десятичных дробей.

Ответ: 1, 5, 10, 15, 25, 60. Решение. $\frac{n+15}{n} = 1 + \frac{15}{n}$, поэтому можно следить за тем, чтобы $\frac{15}{n}$ представлялось в виде конечной десятичной дроби. Аналогично $\frac{n}{n+15} = 1 - \frac{15}{n+15}$, поэтому можно следить за тем, чтобы $\frac{15}{n+15}$ представлялось в виде конечной десятичной дроби. Для этого требуется, чтобы после сокращения знаменатель был произведением степеней двойки и пятёрки. Так как сократить мы можем только на делитель 15, а это 1, 3, 5, 15, то до сокращения, помимо двоек и пятёрок, в знаменателе разрешена не более чем одна тройка. Тогда n , и $n+15$ являются произведениями степеней двойки и пятёрки, возможно, умноженными на 3. Заметим, что ровно одно из них чётное, значит, другое является степенью пятёрки, возможно, умноженной на 3. Проверим все степени пятёрки и степени пятёрки, умноженные на 3, меньшие 85: 1, 3, 5, 15, 25, 75. Теперь проверим числа, отличающиеся от них на 15: (1, 16), (3, 18), (5, 20), (15, 30), (25, 40), (75, 60). Все эти пары подходят, кроме (3, 18), поэтому n — меньшее из двух чисел — может быть равно 1, 5, 15, 10, 25 или 60.

Клон 2. Найдите все натуральные $n < 70$, для которых оба числа $\frac{n+9}{n}$ и $\frac{n}{n+9}$ записываются в виде конечных десятичных дробей.

Ответ: 1, 3, 6, 9, 15, 16, 36.

Клон 3. Найдите все натуральные $n < 70$, для которых оба числа $\frac{n+18}{n}$ и $\frac{n}{n+18}$ записываются в виде конечных десятичных дробей.

Ответ: 2, 6, 12, 18, 30, 32.

Клон 4. Найдите все натуральные $n < 70$, для которых оба числа $\frac{n+21}{n}$ и $\frac{n}{n+21}$ записываются в виде конечных десятичных дробей.

Ответ: 3, 4, 7, 14, 21, 35.

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

