

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 7 класса
2025–2026 учебный год
Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

7.1. Клон 1. Если от трёхзначного числа отнять 7, оно разделится на 7; если отнять 8, оно разделится на 8; если отнять 9 — оно разделится на 9. Найдите это число.

Ответ: 504. Решение. Если вычитаемое и разность делятся на 7, то и уменьшаемое делится на 7. Аналогично оно делится на 8 и на 9. Так как 7, 8 и 9 взаимно простые числа, делимость на них означает делимость на их произведение, то есть на 504. Единственное трёхзначное число, делящееся на 504 — оно само.

Клон 2. Если от трёхзначного числа отнять 6, оно разделится на 6; если отнять 7, оно разделится на 7; если отнять 13 — оно разделится на 13. Найдите это число.

Ответ: 546.

Клон 3. Если от трёхзначного числа отнять 7, оно разделится на 7; если отнять 9, оно разделится на 9; если отнять 11 — оно разделится на 11. Найдите это число.

Ответ: 693.

Клон 4. Если от трёхзначного числа отнять 5, оно разделится на 5; если отнять 8, оно разделится на 8; если отнять 13 — оно разделится на 13. Найдите это число.

Ответ: 520.

7.2. Клон 1. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина в 2 раза больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из неё другой прямоугольник с длиной на 10% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

Ответ: 20. Решение. Обозначим ширину изначального прямоугольника за x , тогда его длина равна $2x$. Длина нового прямоугольника на 10% больше, то есть в 1,1 раза больше, поэтому она равна $2,2x$. Длина проволоки равна периметру изначального прямоугольника — $6x$. Тогда ширина нового прямоугольника равна $(6x - 2,2x \cdot 2) : 2 = 0,8x$. Значит, ширина уменьшилась на 20%.

Клон 2. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина в 3 раза больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из неё другой прямоугольник с длиной на 20% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

Ответ: 60.

Клон 3. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина в 4 раза больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из неё другой прямоугольник с длиной на 10% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

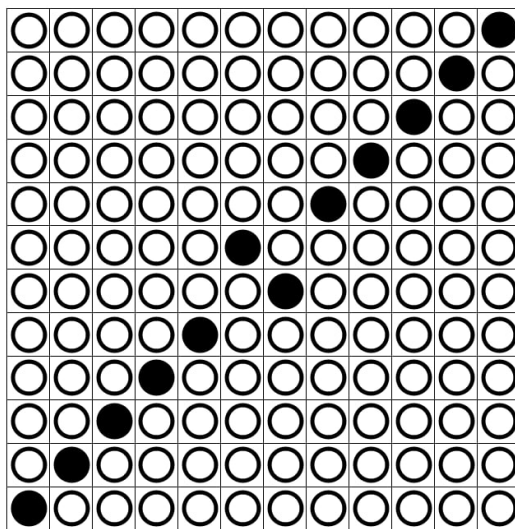
Ответ: 40.

Клон 4. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина в 5 раз больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из неё другой прямоугольник с длиной на 16% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

Ответ: 80.

7.3. Клон 1. В каждой клетке квадрата 12×12 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате на каждой горизонтали, вертикали и обеих диагоналях были как монеты, лежащие вверх орлом, так и монеты, лежащие вверх решкой?

Ответ: 12. Решение. Чтобы не было горизонталей, в которой все монеты орлом вверх, в каждой из них нужно перевернуть хотя бы одну монету, значит, всего нужно перевернуть хотя бы 12 монет. Пример на 12 приведён ниже, на картинке перевёрнутые монеты покрашены. Тогда во всех горизонталях и вертикалях по 1 монете решкой вверх и по 11 орлом вверх, в одной главной диагонали 10 решкой вверх и 2 орлом вверх, а в другой наоборот.



Клон 2. В каждой клетке квадрата 14×14 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате на каждой горизонтали, вертикали и обеих диагоналях были как монеты, лежащие вверх орлом, так и монеты, лежащие вверх решкой?

Ответ: 14.

Клон 3. В каждой клетке квадрата 16×16 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате на каждой горизонтали, вертикали и обеих диагоналях были как монеты, лежащие вверх орлом, так и монеты, лежащие вверх решкой?

Ответ: 16.

Клон 4. В каждой клетке квадрата 18×18 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате на каждой горизонтали, вертикали и обеих диагоналях были как монеты, лежащие вверх орлом, так и монеты, лежащие вверх решкой?

Ответ: 18.

7.4. Клон 1. В одной из двух канистр 10 литров воды, другая пуста. Из первой канистры во вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую — треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся там воды и т.д. Сколько литров воды будет в первой канистре после 1001 переливания?

Ответ: 5. Решение. После первого переливания в обеих канистрах по 5 литров. Заметим, что если в канистрах поровну воды, и мы из одной перельём $\frac{1}{n}$ от её объёма в другую, то в них станет по $5 - \frac{5}{n} = \frac{5(n-1)}{n}$ и $5 + \frac{5}{n} = \frac{5(n+1)}{n}$ литров. Если после этого из второй перелить $\frac{1}{n+1}$ от её объёма в первую, то в них станет по $\frac{5(n-1)}{n} + \frac{5(n+1)}{n(n+1)} = 5$ и $\frac{5(n+1)}{n} - \frac{5(n+1)}{n(n+1)} = 5$ литров, то есть поровну. Значит, каждая пара переливаний возвращает нас к равенству канистр, и после 1001 переливания в обеих канистрах будет по 5 литров.

Клон 2. В одной из двух канистр 20 литров воды, другая пуста. Из первой канистры во вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую — треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся там воды и т.д. Сколько литров воды будет в первой канистре после 999 переливаний?

Ответ: 10.

Клон 3. В одной из двух канистр 14 литров воды, другая пуста. Из первой канистры во вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую — треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся там воды и т.д. Сколько литров воды будет в первой канистре после 1003 переливаний?

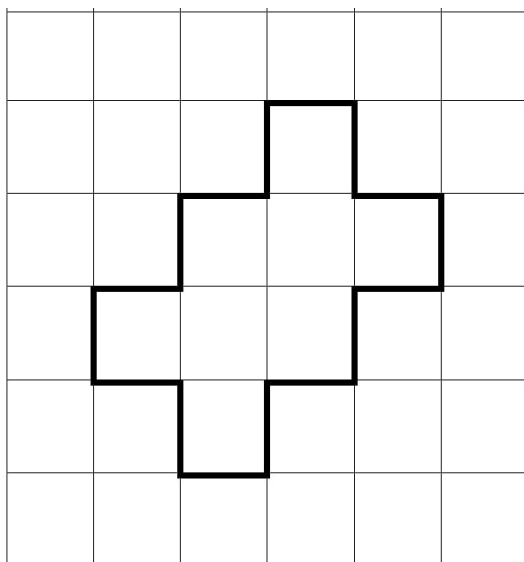
Ответ: 7.

Клон 4. В одной из двух канистр 18 литров воды, другая пуста. Из первой канистры во вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую — треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся там воды и т.д. Сколько литров воды будет в первой канистре после 997 переливаний?

Ответ: 9.

7.5. Клон 1. Сколько вершин может быть у клетчатого многоугольника с периметром 16, стороны которого проходят по линиям клеток? Сторона клетки равна 1. Укажите минимальный и максимальный подходящие варианты.

Ответ: 4, 16. Решение: Длина всех сторон хотя бы 1, поэтому сторон не больше 16, а значит, и вершин тоже, ведь вершин и сторон поровну. В клетчатом многоугольнике вертикальные и горизонтальные стороны чередуются, поэтому всего сторон чётное количество, то есть и вершин чётное, поэтому их не меньше 4. На 4 и 16 есть примеры: прямоугольник 1×7 и фигура ниже.



Клон 2. Сколько вершин может быть у клетчатого многоугольника с периметром 20, стороны которого проходят по линиям клеток? Сторона клетки равна 1. Укажите минимальный и максимальный подходящие варианты.

Ответ: 4, 20.

Клон 3. Сколько вершин может быть у клетчатого многоугольника с периметром 24, стороны которого проходят по линиям клеток? Сторона клетки равна 1. Укажите минимальный и максимальный подходящие варианты.

Ответ: 4, 24.

Клон 4. Сколько вершин может быть у клетчатого многоугольника с периметром 28, стороны которого проходят по линиям клеток? Сторона клетки равна 1. Укажите минимальный и максимальный подходящие варианты.

Ответ: 4, 28.

7.6. Клон 1. Все числа от 1 до 500 выписали подряд: 123456789101112 ... 499500. Сколько раз в этом ряду сразу после двойки идёт тройка?

Ответ: 27. Решение. Двойка и тройка подряд могут идти либо в одном числе, либо «на стыке» двух чисел. Двойка и тройка подряд в одном числе встречаются 15 раз: сами по себе — 23; в первом и втором разрядах — 230, 231, ..., 239; во втором и третьем разрядах — 123, 223, 323, 423. Посчитаем случаи, когда они в соседних числах, то есть одно число оканчивается на 2, а следующее начинается на 3. Среди однозначных 1 раз (2 и 3). Если разрядов больше одного, то оба числа должны начинаться с тройки, а заканчиваться двойкой и тройкой соответственно. Среди двузначных такое встречается 1 раз (32 и 33), среди трёхзначных 10 раз (302 и 303, 312 и 313, ..., 392 и 393). Всего 27 раз.

Клон 2. Все числа от 1 до 600 выписали подряд: 123456789101112 ... 599600. Сколько раз в этом ряду сразу после тройки идёт четвёрка?

Ответ: 28.

Клон 3. Все числа от 1 до 700 выписали подряд: 123456789101112 ... 699700. Сколько раз в этом ряду сразу после четвёрки идёт пятёрка?

Ответ: 29.

Клон 4. Все числа от 1 до 800 выписали подряд: 123456789101112 ... 799800. Сколько раз в этом ряду сразу после пятёрки идёт шестёрка?

Ответ: 30.

7.7. Клон 1. В клетках таблицы 2×2 записаны положительные числа. Петя и Вася выбрали клетку и заштриховали её серым. Петя посчитал сумму чисел в строке, в которой она находится, а Вася проделал ту же самую операцию для столбца. Потом мальчики перемножили свои суммы и получили результат, в 2 раза меньший числа в заштрихованной клетке. Оказалось, что это условие справедливо для любой из четырёх клеток. Найдите сумму всех чисел в таблице. Ответ выразите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,5. Решение. Обозначим числа в первой строке a и b , а во второй — c и d . Запишем условие для чисел a и c : $a = 2(a+b)(a+c)$ и $c = 2(c+d)(c+a)$. Сложим два этих выражения и получим $a+c = 2(a+b)(a+c) + 2(c+d)(c+a) = 2(a+c)(a+b+c+d)$, откуда делением на $a+c$ (числа положительные) получаем $1 = 2(a+b+c+d)$, а значит, сумма всех чисел равна $\frac{1}{2}$.

Замечание. Таблицы, удовлетворяющие условию, существуют, например, если все числа таблицы равны $\frac{1}{8}$.

Клон 2. В клетках таблицы 2×2 записаны положительные числа. Саша и Паша выбрали клетку, Саша посчитал сумму чисел в её строке, а Паша — сумму чисел в её столбце. Потом они перемножили свои суммы, и результат получился в 3 раза больше, чем число в выбранной ими изначально клетке. Оказалось, что то же самое будет верно для любой из четырёх клеток. Найдите сумму всех чисел таблицы.

Ответ: 3.

Клон 3. Клон 1. В клетках таблицы 2×2 записаны положительные числа. Петя и Вася выбрали клетку и заштриховали её серым. Петя посчитал сумму чисел в строке, в которой она находится, а Вася проделал ту же самую операцию для столбца. Потом мальчики перемножили свои суммы и получили результат, в 4 раза меньший числа в заштрихованной клетке. Оказалось, что это условие справедливо для любой из четырёх клеток. Найдите сумму всех чисел в таблице. Ответ выразите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,25.

Клон 4. В клетках таблицы 2×2 записаны положительные числа. Толя и Рома выбрали клетку, Толя посчитал сумму чисел в её строке, а Рома — сумму чисел в её столбце. Потом они перемножили свои суммы, и результат получился в 5 раз больше, чем число в выбранной ими изначально клетке. Оказалось, что то же самое будет верно для любой из четырёх клеток. Найдите сумму всех чисел таблицы.

Ответ: 5.

7.8. Клон 1. По контуру квадрата в одном направлении ползут три жука, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из жуков, если скорости других равны 15 мм/с и 45 мм/с, а все обгоны происходят только в вершинах квадрата. Ответ выразите в мм/с.

Ответ: 9. Решение. Если обозначить длину стороны за a , скорость медленного жука за U_1 , а скорость быстрого жука за U_2 , то время, необходимое быстрому, чтобы догнать медленного, равно $\frac{4a}{U_2 - U_1}$. За это время мед-

ленный жук проходит расстояние $\frac{4aU_1}{U_2 - U_1}$, и если мы хотим, чтобы встречи происходили в вершинах, это расстояние должно быть равно ka для некоторого натурального k . Проведём цепочку равносильных преобразований:

$$ka = \frac{4aU_1}{U_2 - U_1} = \frac{4a}{\frac{U_2}{U_1} - 1} \Leftrightarrow k = \frac{4}{\frac{U_2}{U_1} - 1} \Leftrightarrow k \cdot \frac{U_2}{U_1} - k = 4 \Leftrightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{4 + k}{k}.$$

Значит, то, что обгоны происходят только в вершинах, равносильно тому, что $\frac{U_2}{U_1} = \frac{4 + k}{k}$ для некоторого натурального k . Обозначим скорость самого

медленного жука за x , тогда $\frac{15}{x} = \frac{4 + k_1}{k_1}$ и $\frac{45}{x} = \frac{4 + k_2}{k_2}$. Выразим x из обоих

равенств: $\frac{15k_1}{4 + k_1} = x = \frac{45k_2}{4 + k_2}$. Сократим на 15, перемножим крестом и раскроем скобки, получим $4k_1 + k_1k_2 = 12k_2 + 3k_1k_2$, что можно преобразовать в $(2 - k_2)(6 + k_1) = 12$, откуда $k_2 = 1$, так как оно натуральное, вторая скобка положительна, значит, и первая обязана тоже. Тогда $k_1 = 6$ и $x = 9$.

Клон 2. По контуру квадрата в одном направлении ползут три жука, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из жуков, если скорости других равны 25 мм/с и 75 мм/с, а все обгоны происходят только в вершинах квадрата. Ответ выразите в мм/с.

Ответ: 15.

Клон 3. По контуру квадрата в одном направлении ползут три жука, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из жуков, если скорости других равны 20 мм/с и 60 мм/с, а все обгоны происходят только в вершинах квадрата. Ответ выразите в мм/с.

Ответ: 12.

Клон 4. По контуру квадрата в одном направлении ползут три жука, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из жуков, если скорости других равны 10 мм/с и 30 мм/с , а все обгоны происходят только в вершинах квадрата. Ответ выразите в мм/с .

Ответ: 6.

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

