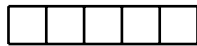


1-1. На доске была написана невозрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_5$. Саша написал на листочке другую последовательность: сколько среди a_i чисел, больших или равных 1, сколько — больше или равных 2, $\dots$ до тех пор пока ему не пришлось бы написать 0. Юра стёр числа с доски. На листочке у Саши остались числа 5, 3, 2, 1. Какая последовательность была записана на доске?

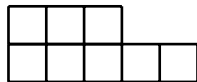
Ответ. $a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1$

Решение. По условию среди записанных чисел все пять не меньше 1, но только три числа не меньше 2. Это означает, что два наименьших числа (a_5 и a_4) равны 1. Также по условию ровно два числа не меньше 3, поэтому оставшееся (среди трёх чисел, не меньших 2) число a_3 в точности равно 2, а остальные (a_2 и a_1) не меньше 3. Среди них только одно число не меньше 4 — это означает, что число $a_2 = 3$. Так как больше чисел на листочке Саши не осталось, то чисел не меньших 5 на доске не было, поэтому самое большое число равно $a_1 = 4$.

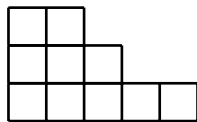
Комментарий. Сюжет задачи можно представить себе так: построим пять башенок из кирпичей, каждая следующая из которых (слева направо) не выше предыдущей. Высота первой башенки равна a_1 , второй — a_2 , и так далее. В условии содержится информация, что в каждой башенке есть хотя бы один кирпич — положим в каждую из пяти башенок кирпич на нижний ряд:



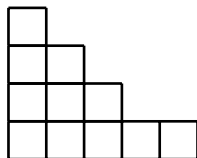
Также по условию есть ровно 3 башенки высотой не менее 2 — это означает, что на второй «этаж» первых трёх башенок нужно положить ещё по кирпичу:



Аналогично на третьем «этаже» двух башенок есть ещё по кирпичу:



Наконец, на четвёртом этаже только одной башенки есть кирпич (поместим его туда), после чего строительство башенок закончилось: у Саши больше нет выписанных чисел, которые бы показывали, что есть ещё башенки высотой не менее 5, не менее 6 и так далее.



Построенная серия башенок даёт ответ: в первой башенке 4 кирпича, во второй — 3 кирпича, в третьей — 2 кирпича, а в четвёртой и пятой — по 1 кирпичу. Это и есть ответ в задаче.

Информация о вариантах

1-2. На доске была написана невозрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_5$. Саша написал на листочке другую последовательность: сколько среди a_i чисел, больших или равных 1, сколько — больше или равных 2, $\dots$ до тех пор пока ему не пришлось бы написать 0. Юра стёр числа с доски. На листочке у Саши остались числа 5, 4, 2, 2, 1, 1. Какая последовательность была записана на доске?

Ответ. $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 1$

1-3. На доске была написана невозрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_5$. Саша написал на листочке другую последовательность: сколько среди a_i чисел, больших или равных 1, сколько — больше или равных 2, ... до тех пор пока ему не пришлось бы написать 0. Юра стёр числа с доски. На листочке у Саши остались числа 5, 3, 3, 2, 2. Какая последовательность была записана на доске?

Ответ. $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 1$

1-4. На доске была написана невозрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_5$. Саша написал на листочке другую последовательность: сколько среди a_i чисел, больших или равных 1, сколько — больше или равных 2, ... до тех пор пока ему не пришлось бы написать 0. Юра стёр числа с доски. На листочке у Саши остались числа 5, 5, 3, 1. Какая последовательность была записана на доске?

Ответ. $a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = 2$

2-1. У Жоры есть три одинаковые колоды, в каждой — 6 карточек с числами от 1 до 6. Сначала он наугад вытаскивает по одной карточке из первых двух колод. Если числа на них совпадают, он дополнительно вытаскивает наугад карточку из третьей колоды. Какова вероятность того, что сумма всех вытащенных чисел окажется чётной?

Ответ. $\frac{5}{12}$

Решение. Всего существует $6 \cdot 6 = 36$ способов достать пару карточек из первых двух колод (одну — из первой колоды, а к ней ещё одну — из второй). При этом ровно половина этих пар имеет нечётную сумму, остальные пары — с чётной суммой: действительно, какую бы карточку ни взяли из первой колоды, во второй колоде половина карточек имеет такую же чётность и половина — другую чётность.

Таким образом, из этих 36 пар ровно 18 с чётной суммой и ровно 18 с нечётной суммой. Также отметим, что есть ровно 6 пар с двумя одинаковыми числами (они входят в число 18 пар с чётной суммой, поэтому пар неодинаковых чисел с чётной суммой будет ровно $18 - 6 = 12$).

Чтобы выполнилось условие задачи, должно произойти одно из двух событий:
А: выбрали пару неодинаковых чисел с чётной суммой (вероятность этого $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$);
Б: выбрали пару одинаковых чисел (вероятность этого $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$), а затем выбрали из третьей колоды карточку с чётным числом (их там 3 из 6, поэтому вероятность равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$) — в итоге вероятность такого составного события равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

Так как события А и Б не могут произойти одновременно (несовместны), то вероятность того, что произойдёт одно из них равна сумме их вероятностей:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Информация о вариантах

2-2. У Жоры есть три одинаковые колоды, в каждой — 8 карточек с числами от 1 до 8. Сначала он наугад вытаскивает по одной карточке из первых двух колод. Если числа на них совпадают, он дополнительно вытаскивает наугад карточку из третьей колоды. Какова вероятность того, что сумма всех вытащенных чисел окажется чётной?

Ответ. $\frac{7}{16}$

2-3. У Жоры есть три одинаковые колоды, в каждой — 6 карточек с числами от 1 до 6. Сначала он наугад вытаскивает по одной карточке из первых двух колод. Если числа на них совпадают, он дополнительно вытаскивает наугад карточку из третьей колоды. Какова вероятность того, что сумма всех вытащенных чисел окажется нечётной?

Ответ. $\frac{7}{12}$

2-4. У Жоры есть три одинаковые колоды, в каждой — 8 карточек с числами от 1 до 8. Сначала он наугад вытаскивает по одной карточке из первых двух колод. Если числа на них совпадают, он дополнительно вытаскивает наугад карточку из третьей колоды. Какова вероятность того, что сумма всех вытащенных чисел окажется нечётной?

Ответ. $\frac{9}{16}$

3-1. Юра выложил в ряд 2025 монет. Если он уберёт первую треть монет слева, то как минимум половина из оставшихся окажется лежащей орлом вверх. То же самое происходит, если Юра убирает последние 40 % монет справа среди оставшихся как минимум половина повёрнута орлом вверх. Какое минимальное количество монет может лежать орлом вверх?

Ответ. 743

Решение. Найдём сначала наибольшее количество монет, которые могут лежать решкой вверх.

Если убрать первую треть монет слева, то останется $\frac{2}{3} \cdot 2025 = 1350$ монет, из них не меньше половины (то есть не меньше 675) лежат орлом вверх, а тогда не больше оставшихся 675 монет (среди неубранных $\frac{2}{3}$) лежат решкой вверх.

Если убрать последние 40 % монет справа, то останется $0,6 \cdot 2025 = 1215$ монет, из них не меньше половины (то есть не меньше 608) лежат орлом вверх, а тогда не больше оставшихся 607 монет (среди неубранных 60 %) лежат решкой вверх.

Заметим, что неубранные монеты в первом случае и во втором случае покрывают весь ряд из 2025 монет. Поэтому каждая монета, лежащая решкой, располагается или в первой группе неубранных монет, или во второй такой группе. А поэтому общее количество решек не больше $675 + 607 = 1282$. Следовательно, общее количество монет, лежащих орлом, не менее $2025 - 1282 = 743$.

Пример на такое количество орлов строится: достаточно слева выложить 675 монет решкой, потом выложить 743 монеты орлом, а остальные монеты (607 монет справа) снова выложить решкой.

Информация о вариантах

3-2. Юра выложил в ряд 2025 монет. Если он уберёт первую треть монет слева, то как минимум половина из оставшихся окажется лежащей орлом вверх. То же самое происходит, если Юра убирает последние 48 % монет справа среди оставшихся как минимум половина повёрнута орлом вверх. Какое минимальное количество монет может лежать орлом вверх?

Ответ. 824

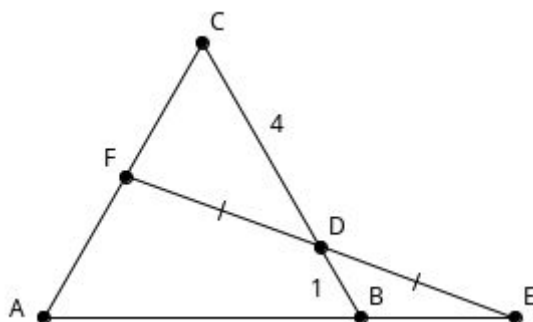
3-3. Юра выложил в ряд 2025 монет. Если он уберёт первые две трети монет слева, то как минимум половина из оставшихся окажется лежащей орлом вверх. То же самое происходит, если Юра убирает последние 24 % монет справа: среди оставшихся как минимум половина повёрнута орлом вверх. Какое минимальное количество монет может лежать орлом вверх?

Ответ. 919

3-4. Юра выложил в ряд 2025 монет. Если он уберёт первые две трети монет слева, то как минимум половина из оставшихся окажется лежащей орлом вверх. То же самое происходит, если Юра убирает последние 20 % монет справа: среди оставшихся как минимум половина повёрнута орлом вверх. Какое минимальное количество монет может лежать орлом вверх?

Ответ. 878

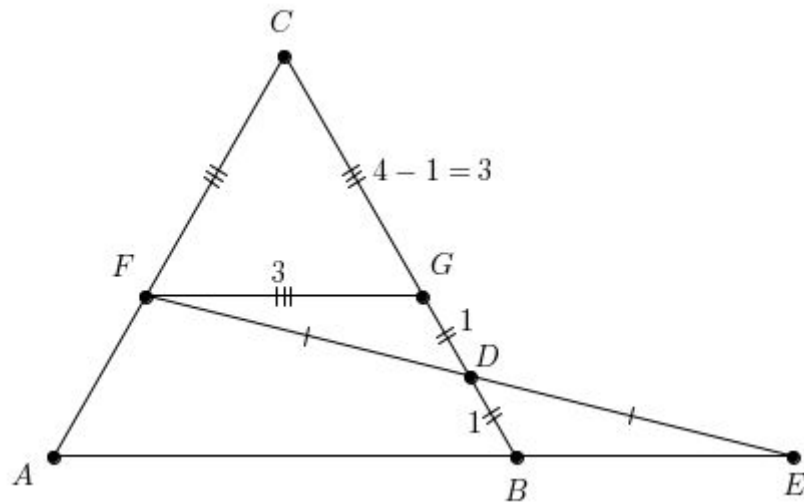
4-1. На сторонах AC и BC , а также на продолжении стороны AB равностороннего треугольника ABC отмечены точки F , D и E соответственно так, что D — середина EF . Длины отрезков BD и DC даны на чертеже ниже.



Найдите EF^2 .

Ответ. 52

Решение. Пусть G — такая точка на отрезке CD , что $DG = 1$. Тогда в четырёхугольнике $BEGF$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, и поэтому это параллелограмм. Значит, $FG \parallel AB$.



Прямая, параллельная одной из сторон равностороннего треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник, поэтому

$FG = CG = CD - DG = 4 - 1 = 3$, а также $\angle FGD = 180^\circ - \angle FGC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

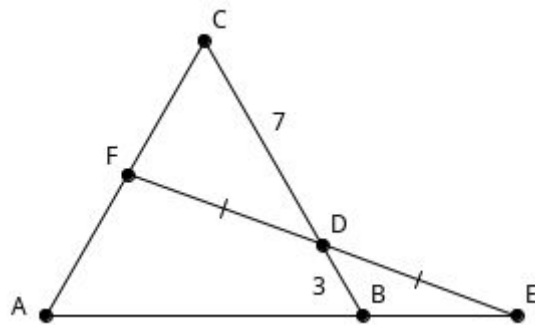
Тогда по теореме косинусов для треугольника FGD :

$FD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 13,$

а $EF^2 = (2FD)^2 = 52$.

Информация о вариантах

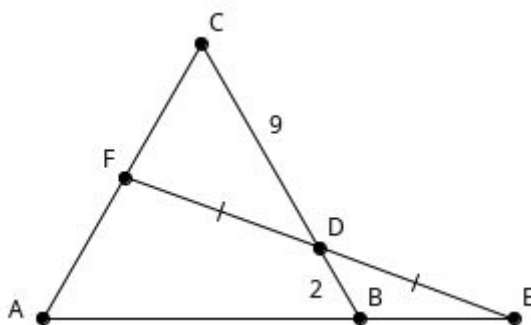
4-2. На сторонах AC и BC , а также на продолжении стороны AB равностороннего треугольника ABC отмечены точки F , D и E соответственно так, что D — середина EF . Длины отрезков BD и DC даны на чертеже ниже.



Найдите EF^2 .

Ответ. 148

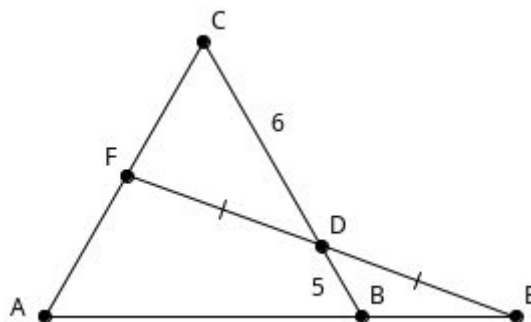
4-3. На сторонах AC и BC , а также на продолжении стороны AB равностороннего треугольника ABC отмечены точки F , D и E соответственно так, что D — середина EF . Длины отрезков BD и DC даны на чертеже ниже.



Найдите EF^2 .

Ответ. 268

4-4. На сторонах AC и BC , а также на продолжении стороны AB равностороннего треугольника ABC отмечены точки F , D и E соответственно так, что D — середина EF . Длины отрезков BD и DC даны на чертеже ниже.



Найдите EF^2 .

Ответ. 124

5-1. Коэффициенты многочлена $P(x)$ — неотрицательные целые числа. Известно, что

$$P(2) = 100, \quad P(P(2)) = 102\,110\,612.$$

а) (3 балла) Найдите значение $P(0)$.

б) (4 балла) Найдите значение $P(1)$.

Ответ. а) 12, б) 32

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — целые неотрицательные числа (то есть, натуральные или 0), при этом старший коэффициент a_n не равен 0. Условие $P(2) = 100$ можно записать так:

$$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 = 100.$$

Так как $a_n < a_n \cdot 2^n$, а для всех остальных слагаемых верно $a_k \leq a_k \cdot 2^k$ (равенство будет только для a_0 и для $a_k = 0$), то верно следующее:

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 < a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 = 100.$$

Таким образом, сумма коэффициентов меньше 100, а так как все они — неотрицательные целые числа, то каждое из них меньше 100 (то есть, целые числа от 0 до 99). Запишем каждый такой коэффициент в виде двузначного числа $a_k = \overline{b_k c_k}$ (в частности, если коэффициент a_k не двузначный, то запишем с ведущим нулём: например, число 7 записали бы как $\overline{07}$).

Примечание: запись вида $\overline{n_1 n_2 \dots n_m}$ (с чертой сверху) означает число, записанное цифрами $n_1, n_2, \dots, n_m$ — черту сверху ставят, чтобы не спутать с произведением чисел $n_1 n_2 \dots n_m$, записанным без знаков умножения.

Теперь заметим, что так как $P(2) = 100$, то $P(P(2)) = P(100)$. Но это значение можно записать так:

$$\begin{aligned} P(100) &= a_n \cdot 100^n + a_{n-1} \cdot 100^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 100 + a_0 = \\ &= \overline{b_n c_n 0000 \dots 00} + \overline{b_{n-1} c_{n-1} 00 \dots 00} + \dots \overline{b_1 c_1 00} + \overline{b_0 c_0} = \\ &= \overline{b_n c_n b_{n-1} c_{n-1} \dots b_1 c_1 b_0 c_0}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, если все коэффициенты — двузначные числа, то при подстановке $x = 100$ значение многочлена будет многозначным числом, представляющим собой просто эти выписанные коэффициенты друг за другом. По условию это значение равно 102 110 612. Разобьём его на двузначные числа (справа налево): 10 21 10 61 2 — и «прочитаем» коэффициенты справа налево: $a_0 = 12$, $a_1 = 06$, $a_2 = 11$, $a_3 = 02$, $a_4 = 1$ (корректнее, конечно, теперь записать как $a_0 = 12$, $a_1 = 6$, $a_2 = 11$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$).

Сам многочлен теперь найден:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 6x + 12.$$

Осталось ответить на вопросы задачи:

$$P(0) = a_0 = 12.$$

$$P(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 2 + 11 + 6 + 12 = 32.$$

Информация о вариантах

5-2. Коэффициенты многочлена $P(x)$ — неотрицательные целые числа. Известно, что

$$P(2) = 100, \quad P(P(2)) = 201\,061\,016.$$

- а) (3 балла) Найдите значение $P(0)$.
- б) (4 балла) Найдите значение $P(1)$.

Ответ. а) 16, б) 35.

5-3. Коэффициенты многочлена $P(x)$ — неотрицательные целые числа. Известно, что

$$P(2) = 100, \quad P(P(2)) = 202\,040\,428.$$

- а) (3 балла) Найдите значение $P(0)$.
- б) (4 балла) Найдите значение $P(1)$.

Ответ. а) 28, б) 40

5-4. Коэффициенты многочлена $P(x)$ — неотрицательные целые числа. Известно, что

$$P(2) = 100, \quad P(P(2)) = 102\,041\,522.$$

- а) (3 балла) Найдите значение $P(0)$.
- б) (4 балла) Найдите значение $P(1)$.

Ответ. а) 22, б) 44

6-1. Наташа и Петя играют в игру. Вначале Наташа первой называет целое число от 1 до 50. Затем Петя называет своё число — от 1 до 87. После этого Наташа называет число от 1 до 90. Если сумма всех трёх названных чисел делится на 97, побеждает Наташа. Иначе побеждает Петя. Какое число Наташа должна назвать первым, чтобы при любом выборе Пети она могла победить? Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 6, 7, 8, 9.

Решение. Пусть Наташа первым написала число a , потом Петя написал b , а далее Наташа написала c . Напомним, что через $x \equiv y \pmod{n}$ обозначается, что x и y дают одинаковые остатки при делении на n .

Если Наташа победила, то

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{97},$$

т.е. Наташа должна написать число $c \equiv -a - b \pmod{97}$. Т.к. $c \in \{1, 2, \dots, 90\}$, то после хода Пети число $a + b$ должно давать один из остатков 7, 8, ..., 96 при делении на 97.

Если Наташа напишет первым числа от 1 до 5, то Петя может написать число 1, и Наташа не сможет выиграть. Если Наташа в качестве a выберет число от 10 до 50, то Петя сможет написать число $97 - a \in \{47, \dots, 87\}$, тогда $a + b \equiv 0 \pmod{97}$ и Наташа вновь проиграет. Наконец, если Наташа напишет одно из чисел от 6 до 9, то после хода Пети число на доске будет от 7 до 96, что и нужно Наташе для победы.

Информация о вариантах

6-2. Наташа и Петя играют в игру. Вначале Наташа первой называет целое число от 1 до 64. Затем Петя называет своё число — от 1 до 93. После этого Наташа называет число от 1 до 96. Если сумма всех трёх названных чисел делится на 100, побеждает Наташа. Иначе побеждает Петя. Какое число Наташа должна назвать первым, чтобы при любом выборе Пети она могла победить? Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 3, 4, 5, 6.

6-3. Наташа и Петя играют в игру. Вначале Наташа первой называет целое число от 1 до 48. Затем Петя называет своё число — от 1 до 62. После этого Наташа называет число от 1 до 65. Если сумма всех трёх названных чисел делится на 76, побеждает Наташа. Иначе побеждает Петя. Какое число Наташа должна назвать первым, чтобы при любом выборе Пети она могла победить? Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 10, 11, 12, 13.

6-4. Наташа и Петя играют в игру. Вначале Наташа первой называет целое число от 1 до 69. Затем Петя называет своё число — от 1 до 51. После этого Наташа называет число от 1 до 54. Если сумма всех трёх названных чисел делится на 68, побеждает Наташа. Иначе побеждает Петя. Какое число Наташа должна назвать первым, чтобы при любом выборе Пети она могла победить? Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 13, 14, 15, 16.

7-1. Пусть x, y, z — такие положительные действительные числа, такие что выполнены следующие равенства:

$$x^{\log_2(yz)} = 2^8 \cdot 3^4, \quad y^{\log_2(zx)} = 2^9 \cdot 3^6, \quad z^{\log_2(xy)} = 2^5 \cdot 3^{10}.$$

Найдите значение произведения xyz . Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 576, $1/576$.

Решение. Прологарифмируем каждое равенство по основанию 2. С учётом свойств логарифма, получаем систему

$$\begin{cases} (\log_2 y + \log_2 z) \log_2 x = 8 + 4 \log_2 3, \\ (\log_2 z + \log_2 x) \log_2 y = 9 + 6 \log_2 3, \\ (\log_2 x + \log_2 y) \log_2 z = 5 + 10 \log_2 3. \end{cases}$$

Если сложить первые два равенства и вычесть из полученной суммы третье, получим

$$2 \log_2 x \log_2 y = 12, \text{ или } \log_2 x \log_2 y = 6$$

Прделаем аналогичные операции с двумя другими парами строк и получим систему

$$\begin{cases} \log_2 x \log_2 y = 6, \\ \log_2 y \log_2 z = 3 + 6 \log_2 3, \\ \log_2 z \log_2 x = 2 + 4 \log_2 3. \end{cases}$$

Наконец, перемножим первые два равенств и поделим на третье:

$$(\log_2 y)^2 = 9, \text{ откуда } \log_2 y = \pm 3.$$

Итого, получаем

$$\begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 3 \\ \log_2 z = 1 + 2 \log_2 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 y = -3 \\ \log_2 z = -1 - 2 \log_2 3 \end{cases}$$

Значит,

$$\log_2(xyz) = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \pm(6 + 2 \log_2 3), \text{ откуда } xyz = (2^6 \cdot 3^2)^{\pm 1},$$

т.е. $xyz = 576$ или $xyz = 1/576$.

Информация о вариантах

7-2. Пусть x, y, z — такие положительные действительные числа, такие что выполнены следующие равенства:

$$x^{\log_2(yz)} = 2^{12} \cdot 5^8, \quad y^{\log_2(zx)} = 2^6 \cdot 5^2, \quad z^{\log_2(xy)} = 2^{10} \cdot 5^{10}.$$

Найдите значение произведения xyz . Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 3200, 1/3200.

7-3. Пусть x, y, z — такие положительные действительные числа, такие что выполнены следующие равенства:

$$x^{\log_2(yz)} = 2^4 \cdot 3^6, \quad y^{\log_2(zx)} = 2^3 \cdot 3^3, \quad z^{\log_2(xy)} = 2^3 \cdot 3^9.$$

Найдите значение произведения xyz . Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 432, 1/432.

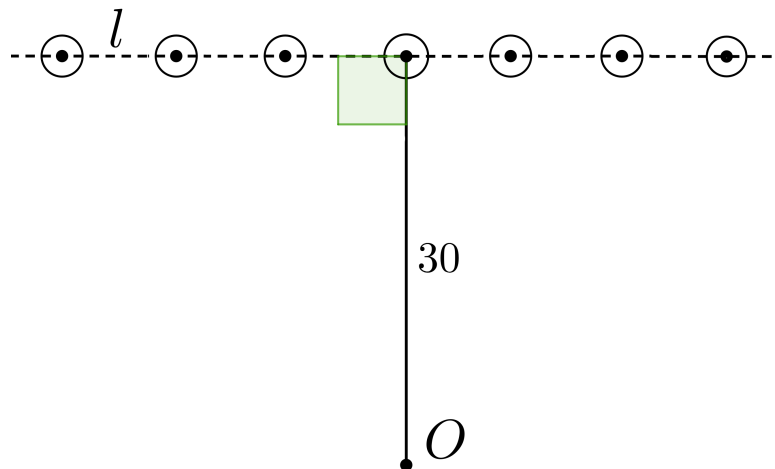
7-4. Пусть x, y, z — такие положительные действительные числа, такие что выполнены следующие равенства:

$$x^{\log_2(yz)} = 2^3 \cdot 3^4, \quad y^{\log_2(zx)} = 2^4 \cdot 3^8, \quad z^{\log_2(xy)} = 2^3 \cdot 3^{12}.$$

Найдите значение произведения xyz . Укажите все подходящие варианты.

Ответ. 1296, 1/1296.

8-1. Одинаковые ветряные турбины расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга вдоль прямой линии. Каждая башня турбины представляет собой вертикальный цилиндр радиусом 3 метра. Пусть ℓ — прямая, проходящая через центры оснований всех башен. Наблюдатель находится в точке O на той же плоскости, причём проекция O на ℓ совпадает с одним из центров турбины, расстояние до ℓ от точки O указано на рисунке.



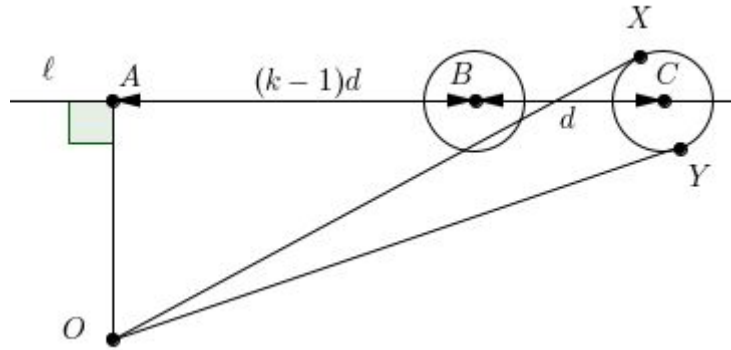
При разных значениях d число полностью видимых башен может быть разным. Найдите наибольшее число башен, которые могут быть полностью видны.

Башня T полностью видна, если отрезки касательных из точки O до башни T не пересекают (но могут касаться) другие башни. Башен очень много в обе стороны от наблюдателя.

Ответ. 11.

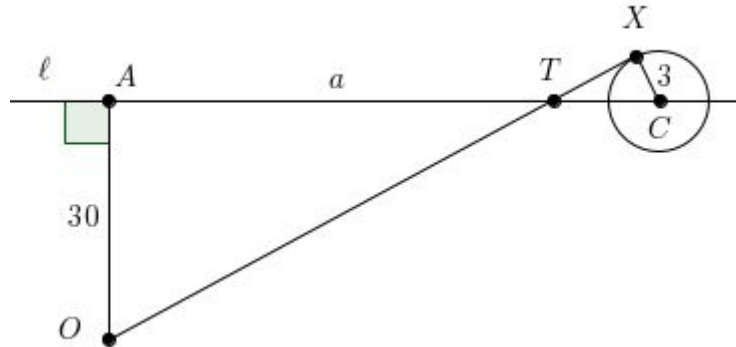
Решение. Будем считать, что d — это расстояние между центрами турбин на прямой ℓ . Для начала покажем, что больше 11 башен увидеть не удастся.

Пусть A — центр основания башни, в которую приходит перпендикуляр из O ; B и C — центры соседних башен на расстояниях $(k-1)d$ и kd от точки A ; OX и OY — касательные из O к окружности башни с центром в точке C :



Для того, чтобы отрезок OX не пересекал окружность с центром в точке B , необходимо, чтобы расстояние от точки B до OX было не меньше 3. Т.к. расстояние от точки C до OX равно 3, то это равносильно тому, что отрезок OX пересекает отрезок BC в точке, которая ближе к C , чем к B .

Пусть OX пересекает ℓ в точке T . Тогда $CT \leq d/2$.



Из подобия прямоугольных треугольников ATO и XTC имеем:

$$\frac{OT}{OA} = \frac{CT}{CX},$$

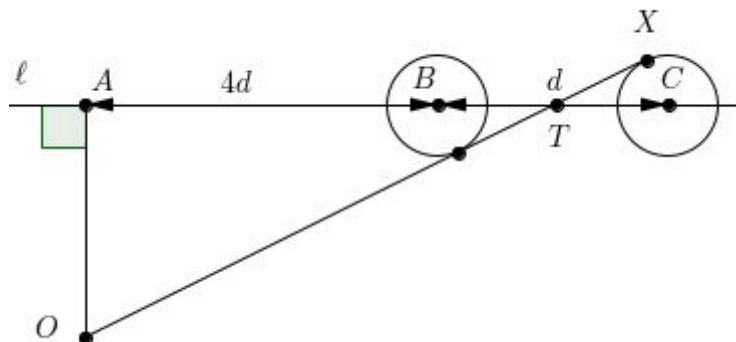
откуда $OT = 10 \cdot CT \leq 5d$.

С другой стороны, $AT = AC - CT \geq kd - d/2$. Поскольку $OT \geq AT$, получаем, что

$$5d \geq \frac{2k-1}{2}d,$$

откуда $2k-1 \leq 10$, $k \leq 5$. Значит, с одной стороны от точки A можно увидеть не более 5 турбин. Значит, суммарно можно увидеть не более 11 турбин: 5 слева, 5 справа и турбину с центром в точке A .

Теперь докажем, что все 11 турбин могут быть полностью видны. Для этого достаточно проверить, что может быть полностью видна с центром на расстоянии $5d$ от точки A . Будем подбирать d так, чтобы OX из рисунков выше была общей касательной для башен с центрами в точках B и C :



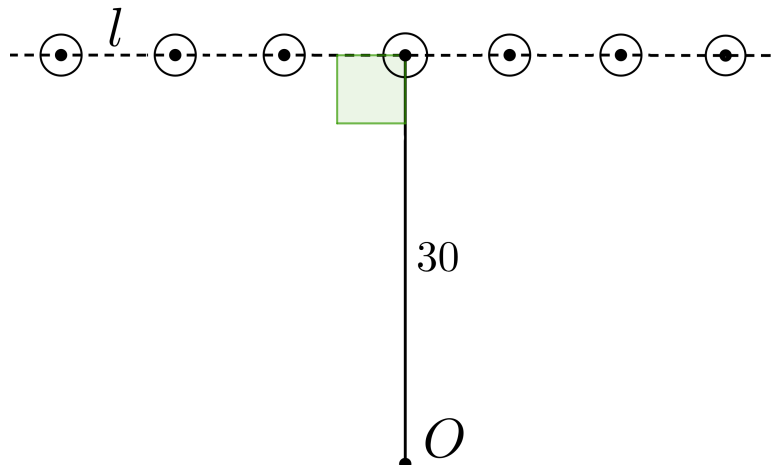
Тогда $AT = 9d/2$, $CT = d/2$, из подобия треугольников AOT и XCT : $OT = CT \cdot \frac{OA}{CX} = 5d$. По теореме Пифагора для треугольника AOT :

$$\frac{81}{4}d^2 + 30^2 = 25d^2,$$

т.е. $d^2 = \frac{30^2 \cdot 4}{19} > 36$, т.е. $d > 6$, а значит мы сможем так расположить турбины радиуса 3 метра.

Информация о вариантах

8-2. Одинаковые ветряные турбины расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга вдоль прямой линии. Каждая башня турбины представляет собой вертикальный цилиндр радиусом 5 метров. Пусть ℓ — прямая, проходящая через центры оснований всех башен. Наблюдатель находится в точке O на той же плоскости, причём проекция O на ℓ совпадает с одним из центров турбины, расстояние до ℓ от точки O указано на рисунке.

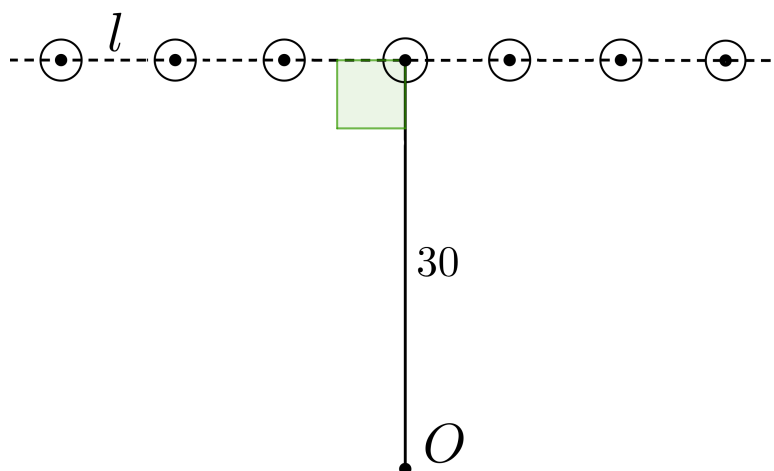


При разных значениях d число полностью видимых башен может быть разным. Найдите наибольшее число башен, которые могут быть полностью видны.

Башня T полностью видна, если отрезки касательных из точки O до башни T не пересекают (но могут касаться) другие башни. Башен очень много в обе стороны от наблюдателя.

Ответ. 7.

8-3. Одинаковые ветряные турбины расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга вдоль прямой линии. Каждая башня турбины представляет собой вертикальный цилиндр радиусом 1,5 метра. Пусть ℓ — прямая, проходящая через центры оснований всех башен. Наблюдатель находится в точке O на той же плоскости, причём проекция O на ℓ совпадает с одним из центров турбины, расстояние до ℓ от точки O указано на рисунке.

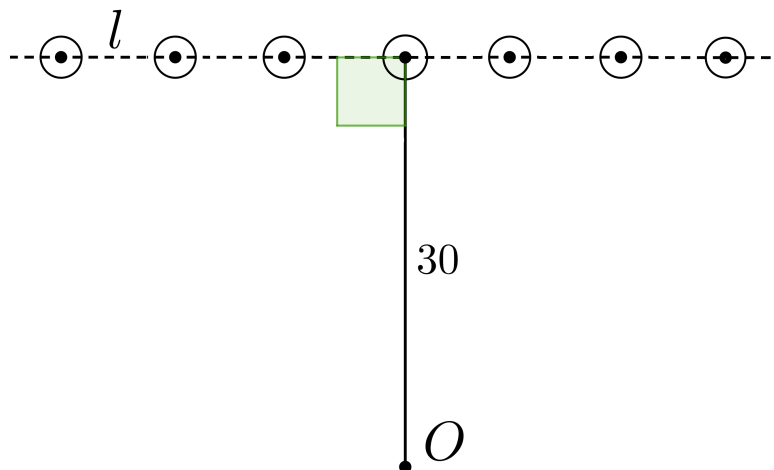


При разных значениях d число полностью видимых башен может быть разным. Найдите наибольшее число башен, которые могут быть полностью видны.

Башня T полностью видна, если отрезки касательных из точки O до башни T не пересекают (но могут касаться) другие башни. Башен очень много в обе стороны от наблюдателя.

Ответ. 21.

8-4. Одинаковые ветряные турбины расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга вдоль прямой линии. Каждая башня турбины представляет собой вертикальный цилиндр радиусом 1 метр. Пусть ℓ — прямая, проходящая через центры оснований всех башен. Наблюдатель находится в точке O на той же плоскости, причём проекция O на ℓ совпадает с одним из центров турбины, расстояние до ℓ от точки O указано на рисунке.



При разных значениях d число полностью видимых башен может быть разным. Найдите наибольшее число башен, которые могут быть полностью видны.

Башня T полностью видна, если отрезки касательных из точки O до башни T не пересекают (но могут касаться) другие башни. Башен очень много в обе стороны от наблюдателя.

Ответ. 31.

