ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

8 класс

8.1. Из цифр 0, 1, 2, …, 9 составили два пятизначных числа A и B (все цифры использованы, на 0 число начинаться не может). Может ли оказаться так, что число A делится на каждую цифру числа B, кроме 0, а число B делится на каждую цифру числа A?

Ответ. Может.

Решение. Например, подойдут числа A=49518, B=76320.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой правильный пример – 7 баллов.

8.2. Среди 18 человек 9 лжецов (они всегда лгут) и 9 рыцарей (они всегда говорят правду). Каждому из них дали конверт, причём ровно в 9 из них положили открытку. У людей спросили, есть ли у них в конверте открытка. Могло ли оказаться, что 9 из них ответили «да», а 9 ответили «нет»?

Ответ. Не может.

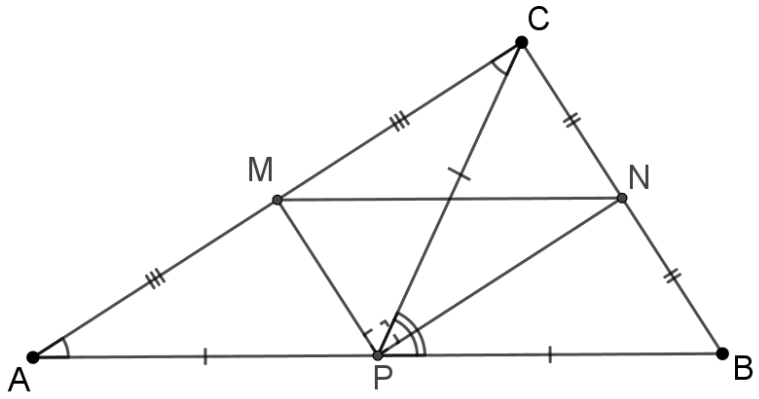
Решение. Пусть сначала ни у кого не было открытки, тогда мы получим 9 ответов «да» и 9 ответов «нет». Будем давать по очереди 9 людям открытки. При выдаче открытки любой человек (лжец или рыцарь) изменит свой ответ на противоположный. То есть произойдет 9 смен ответов. Но так как и после выдачи открыток оказалось 9 ответов «да» и 9 ответов «нет», то количество смен ответов должно быть чётным. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка P. Оказалось, что угол APC в два раза больше угла ABC, угол BPC в два раза больше угла BAC. Найдите PC, если $MN = 2$, где точка M – середина стороны AC, а точка N – середина стороны BC.

Ответ. 2.

Решение. Внешний угол BPC треугольника APC равен сумме углов PAC и PCA. По условию, угол BPC в два раза больше угла PAC, значит, углы PAC и PCA равны, и тогда $PA = PC$. Аналогично $PB = PC$. Следовательно, треугольники APC и BPC являются равнобедренными и в них медианы PM и PN являются и биссектрисами, и высотами, значит, углы $PMC,\ PNC$ – прямые. Угол MPN – прямой как сумма половин двух смежных углов APC и BPC. Тогда в четырёхугольнике $MPNC$ углы $MPN,\ PMC,\ PNC$ – прямые, откуда $MPNC$ - прямоугольник. Тогда $MN = PC = 2$ как диагонали прямоугольника.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказана равнобедренность одного из треугольников – 3 балла.

8.4. Олег утверждает, что какие бы 100 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее *N* составных. Какое наибольшее значение может принимать *N*?

Ответ. 98.

Решение. Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 98 из 99 сумм точно будут чётными числами.
Покажем, что 99 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_{99} - 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_{99}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что можно сделать 98 составных сумм – 4 балла.
Доказано, что 99 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.

8.5. Можно ли выбрать числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ так, что произведения $a_1a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_4a_5, \dots, a_8a_9a_{10}a_1$, $a_9a_{10}a_1a_2$, $a_{10}a_1a_2a_3$, записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 10$?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим 5 произведений $a_1a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5a_6$, $a_5a_6a_7a_8$, $a_7a_8a_9a_{10}$, $a_9a_{10}a_1a_2$. Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ участвует дважды, то есть равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 1 до 10 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 7, а никакое другое из них на 7 не делится.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Олмат

онлайн-школа · олимпиадная математика, программирование, экономика, физика

Учим детей с 0 по 11 класс математике, программированию, экономике и физике — глубже школьной программы, онлайн, с преподавателями из МГУ, МФТИ и ВШЭ. Каждый год у нас занимается больше 1000 учеников, и они поступают в сильные школы и вузы: во Вторую школу, 179-ю, СУНЦ МГУ, «Воробьёвы горы», на смены в «Сириус».



Преподаватели и кураторы Олмат

Как у нас устроено

- **Группы строго по уровню.** От тех, кто начинает с нуля, до призёров всероса — ребёнок попадает к равным по силе, а не скучает и не тонет.
- **Живые занятия, а не записи.** Онлайн один-два раза в неделю, каждую домашнюю работу проверяет преподаватель, раз в месяц — тренировочная олимпиада.
- **Отбор преподавателей.** Из тридцати кандидатов берём одного. Среди преподавателей — победители и призёры всероса, студенты и выпускники МГУ, МФТИ и ВШЭ.

132	180	9 из 10	5,0
диплома финала ВсОШ 2025/26	призёров Мат-праздника в 2026	поступают в топ-вузы по олимпиадам	рейтинг в Яндексе, 500+ отзывов в ВК

Ребёнок сам захочет решать — и дойдёт до диплома

«Сам бежит к компьютеру, ещё дорешивает после занятия» — про это пишет каждый седьмой родитель в отзывах. Начать можно с базового курса: 0–9 класс, есть лицензия — налоговый вычет или оплата маткапиталом.

olmath.ru/zoomgroups

На странице — программа, расписание и цены.

Не готовы записываться — подпишитесь

В каналах Олмат — разборы олимпиадных задач, анонсы туров и подборки для самостоятельной подготовки.

MAX: **max.ru/id9715500368_biz**

Telegram: **t.me/olmath**

MAX

Telegram

Материал подготовлен школой или организатором олимпиады и публикуется в справочных целях. Олмат не является его автором.