ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2024-2025 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин..

Задачи 5.2 и 10.1 предложены С.Е. Бойченко, 6.5. предложена А.Ю. Головко, 7.4. предложена П.А. Остаиным, 7.5 предложена А.С. Русскиным.

5 класс

5.1. В школьном буфете пицца стоит 45 рублей, пирожок – 12 рублей, а пирожное – 18 рублей. Два друга купили в буфете 5 кулинарных изделий и заплатили за них 132 рубля. Какие покупки они сделали? Приведите пример.

Ответ. 2 пиццы, 1 пирожное и 2 пирожка.

Решение. Если бы пицца не приобреталась, то максимальная стоимость покупки была бы не больше 18·5=90 рублей, что меньше 132. Друзья купили две пиццы, так как общая стоимость покупки – чётное число и общая стоимость купленных пирожков и пирожных – чётное число (стоимость 4 пицц равна 180 рублям, что больше 142 рублей). Тогда стоимость трех оставшихся изделий равна 42 рублям. Простой перебор показывает, что единственный вариант: 42 = 12+12+18.

Замечание. Также можно было бы заметить, что если бы ребята купили 1 пиццу, то покупка стоила бы не больше 117 рублей, а 3 пиццы – не меньше 159 рублей.

Комментарий. За правильный пример ставится 7 баллов. В этой задаче обосновывать построение примера по условию не требуется.

5.2. Девять сладкоежек купили 5 пирогов. Каждый пирог разрезали на 6 или 8 кусочков. Все съели одинаковое количество кусочков и ничего не осталось. По сколько кусочков съел каждый из сладкоежек?

Ответ. 4.

Решение. Если каждый пирог разрезать на 6 кусочков, то всего получится 30 кусочков, а если каждый пирог разрезать на 8 кусочков, то всего получится 40 кусочков. То есть количество кусочков не меньше 30 и не больше 40. Если все 9 сладкоежек съели одинаковое количество кусочков, то общее количество кусочков делится на 9. Но единственное делящееся на 9 число между 30 и 40 – это 36. Значит, каждый сладкоежка съел по 4 кусочка пирога.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера – 2 балла.
Замечено, что общее количество кусочков не меньше 30 и не больше 40 – 3 балла.
Замечено, что общее количество кусочков делится на 9 – 3 балла.

5.3. Можно ли записать в некоторые клетки таблицы 6×6 числа от 1 до 11 (каждое из этих 11 чисел ровно один раз) так, чтобы сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любом столбце были бы меньше 13?

Ответ. Можно.

Решение. Один из возможных примеров расстановки чисел показан в таблице.

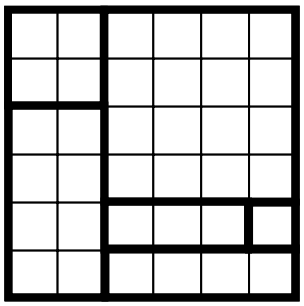
11	1				
	10	2			
		9	3		
			8	4	
				7	5
					6

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример расстановки чисел – 7 баллов.

5.4. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 6×6 на 6 различных клетчатых прямоугольников, из которых ровно 3 являются квадратами?

Ответ. Можно.

Решение. Один из возможных примеров разрезания показан на рисунке.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример разрезания – 7 баллов.
Любой неверный пример разрезания (другое количество прямоугольников или квадратов, есть одинаковые фигурки) – 0 баллов.

5.5. Найдите все решения ребуса ПАРТА + ПАРТА = КЛАСС и объясните, почему других решений нет. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 41561 + 41561 = 83122.

Решение. Из сложения единиц следует, что цифра С – чётная, тогда из сложения десятков следует, что Т + Т = С + 10 и А + А = С (нет переноса в разряд десятков). Из сложения сотен следует, что Р + Р + 1 = А или Р + Р + 1 = А + 10. Первое невозможно – в разряде тысяч тогда получается А + А = Л, а у нас А + А = С. Значит, А = 2Р – 9, то есть нечётное число. С другой стороны, А < 5 (А + А = С). Значит, А – это 1 или 3. Для А = 1 последовательно получаем: С = 2, Т = 6, Р = 5, Л = 3. Наконец для равенства П + П = К остались цифры 4, 7, 8, 9. Значит, П = 4, К = 8. Для А = 3 последовательно получаем: С = 6, Т = 8, Р = 6 – повтор цифры, и этот случай невозможен.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.
Доказано, что А = 1 или А = 3 – 2 балла (эти баллы суммируются с баллами за ответ).

6 класс

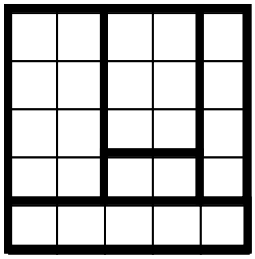
6.1. Аня, Боря и Вася ходили за грибами. Вернувшись, они сказали следующие фразы. Аня: «Мы с Борей вдвоём набрали 17 грибов»; Боря: «Мы с Васей вдвоём набрали 34 гриба», Вася: «Мы с Аней вдвоём набрали 15 грибов». Мама сказала им: «Кто-то из вас ошибся.» Почему она так решила?

Решение. Предположим, что все дети не ошиблись. Так как Аня сказала, что они с Борей вдвоём набрали 17 грибов, то Боря набрал не больше 17 грибов. Так как Вася сказал, что они с Аней вдвоём набрали 15 грибов, то Вася набрал не больше 15 грибов. Значит, Боря и Вася вместе набрали не больше 15+17=32 грибов, что меньше 34. Значит, кто-то точно ошибся.

6.2. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 5×5 на 5 различных клетчатых прямоугольников, не являющихся квадратами?

Ответ. Можно.

Решение. Один из возможных примеров разрезания показан на рисунке.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример разрезания – 7 баллов.
Любой неверный пример разрезания (другое количество прямоугольников, есть квадраты или одинаковые фигурки) – 0 баллов.

6.3. В банке можно положить вклад на месяц под фиксированный процент. В конце месяца банк начислит проценты, а потом округлит (по обычным правилам) начисленную сумму до целого числа рублей. У Васи и Пети одинаковые суммы денег. Вася разделил свои деньги на две равные части и открыл два вклада, а Петя положил все свои деньги на один вклад. Может ли оказаться, что после выплаты процентов сумма у Васи будет больше суммы у Пети?

Ответ. Может.

Решение. Пусть после начисления процентов у Васи на каждом из вкладов начислилось (с процентами) 1000,6 рублей, тогда после округления на каждом из двух его вкладов окажется 1001 рубль, то есть всего у Васи будет 2002 рубля. У Пети должна начислиться сумма 2·1000,6=2001,2 рубля. После округления у него будет 2001 рубль.

Комментарий. Пример может быть другим, нужно его проверить.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6.4. Петя заметил, что для краткой записи дней недели: пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс используются 8 букв, которые встречаются «б» – 1 раз, «в» – 2 раза, «н» – 1 раз, «п» – 2 раза, «р» – 1 раз, «с» – 3 раза, «т» – 3 раза, «ч» – 1 раз. Петя посчитал, что за N дней разность между числом появлений каких-то двух букв равна 5. При каком наименьшем N такое могло произойти?

Ответ. 11.

Решение. За любые 7 подряд идущих дней разность между числом появлений любых двух разных букв не больше 2. Чтобы получить разность, равную 5, нужно добавить к этой разности ещё 3 «частые» буквы и не добавить «редкую». «Частые» буквы не идут подряд, поэтому потребуется ещё по крайней мере дополнительные 4 дня. Подходят следующие 11 дней: вт, ср, чт, пт, сб, вс, пн, вт, ср, чт, пт. Здесь 6 букв «т» и 1 буква «б».

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что N не меньше 11 – 4 балла.
Приведен пример для N =11 – 3 балла.

6.5. На доске изначально написаны три числа: 1, 2 и 4. За один шаг можно выбрать любые два из них, к одному прибавить 1, а к другому прибавить 2 (при этом два старых числа стирают, а на их место записывают два новых). Можно ли в результате нескольких таких операций получить на доске три равных числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Заметим, что после каждой операции сумма всех чисел на доске увеличивается на 3. Если после n таких операций получились три равных числа, то их сумма делится на 3 и больше изначальной суммы чисел на $3n$. Но изначально сумма чисел на доске равнялась 1+2+4 = 7. Получаем противоречие, так как $3n + 7$ не делится на 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7 класс

7.1. В шестизначном числе пронумеровали слева направо все цифры числами от 1 до 6, после чего все цифры с чётными номерами в том же порядке переставили на первые три места, а все цифры с нечётными номерами в том же порядке переставили на последние три места. Получившееся число совпало с исходным. Какое наибольшее количество различных цифр может быть в таком числе?

Ответ. 2.

Решение. Обозначим это шестизначное число через $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Тогда по условию оно совпадает с числом $\overline{a_2a_4a_6a_1a_3a_5}$. Значит, $a_1 = a_2 = a_4$ и $a_3 = a_6 = a_5$. Таким образом, различных цифр не более двух. В качестве примера числа с двумя различными цифрами подойдёт число 112122.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что различных цифр не больше двух – 5 баллов.
Приведен пример числа с двумя различными цифрами – 2 балла.

7.2. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 1234567 и делящееся на 225.

Ответ. 1234567125.

Решение. Искомое число должно делиться на 9 и на 25, то есть оканчиваться на 00 или на 25 или на 50 или на 75, и сумма цифр числа должна делиться на 9. У числа 1234567 сумма цифр дает остаток 1 при делении на 9, то есть нам нужно приписать справа такие цифры, чтобы они давали число, делящееся на 25 и с суммой цифр, дающей остаток 8 при делении на 9. Наименьшее такое число – это 125 (дописать одну или две цифры при данных ограничениях невозможно).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.

7.3. В банке можно положить вклад на месяц под фиксированный процент. В конце месяца банк начислит проценты, а потом округлит (по обычным правилам) начисленную сумму до целого числа рублей. У Васи и Пети одинаковые суммы денег. Вася разделил свои деньги на две равные части и открыл два вклада, а Петя положил все свои деньги на один вклад. Может ли оказаться, что после выплаты процентов сумма у Васи будет меньше суммы у Пети?

Ответ. Может.

Решение. Пусть после начисления процентов у Васи на каждом из вкладов начислилось (с процентами) 1000,4 рублей, тогда после округления на каждом из двух его вкладов окажется 1000 рублей, то есть всего у Васи будет 2000 рублей. У Пети должна начислиться сумма 2·1000,4=2000,8 рублей. После округления у него будет 2001 рубль.

Комментарий. Пример может быть другим, нужно его проверить.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. За круглый стол сели семь математиков. Каждому из них дали карточку, на которой написано число «1» или «–1». Затем на доску записали семь чисел – произведения чисел на карточках каждых двух математиков, сидящих рядом. После этого на доску записали восьмое число – произведение всех семи чисел на карточках математиков. Какое наименьшее значение может принимать сумма 8 выписанных на доске чисел?

Ответ. –6.

Решение. На доске будут записаны числа 1 или –1. Нам нужно найти наибольшее возможное количество чисел –1 на доске. Заметим, что у каких-то двух сидящих рядом математиков на карточках будут одинаковые числа (иначе числа 1 и –1 чередовались бы по кругу, но это невозможно, так как 7 – нечётное число). Поэтому максимальное количество чисел –1 на доске будет 7 (а наименьшая возможная сумма – это –6).
Покажем, что это возможно. Пусть у математиков (по кругу) будут карточки 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1. Так как произведение этих 7 чисел равно –1, на доске будут выписаны 7 чисел –1 и одно число 1.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что сумма не меньше –6 – 5 баллов.
Приведен пример для суммы –6 – 2 балла.

7.5. На острове живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На чаепитие в зале собралось 30 человек. В процессе беседы десять из них сказали, что в зале ровно 20 рыцарей. Пятеро сказали, что в зале не больше 7 рыцарей. Двенадцать человек сказали, что в зале ровно 10 рыцарей. А остальные трое сказали, что в зале ровно 9 рыцарей. Каждый произнес ровно одну фразу. Сколько рыцарей присутствует на чаепитии?

Ответ. 5.

Решение. Пусть в зале 10 рыцарей. Тогда те 12 человек, которые сказали, что в зале ровно 10 рыцарей, сказали правду, то есть они являются рыцарями. Получили противоречие, значит все эти 12 человек – лжецы. Но тогда рыцарей не больше чем 30–12=18 человек. Значит те, кто сказал, что в зале 20 рыцарей – тоже лжецы. Это сказали 10 человек, значит рыцарей не больше, чем 18–10=8. Отсюда следует, что те 3, кто сказал, что рыцарей 9 – тоже лжецы. Значит рыцарей не больше 8–3=5. Значит, те 5 человек, кто сказал, что рыцарей не больше 7, сказали правду. Поэтому они рыцари. А так как рыцарей не больше 5, в комнате ровно 5 рыцарей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Ответ получен рассмотрением примера – 2 балла.

8 класс

8.1. В десятизначном числе пронумеровали слева направо все цифры числами от 1 до 10, после чего все цифры с чётными номерами в том же порядке переставили на первые пять мест, а все цифры с нечётными номерами в том же порядке переставили на последние 5 мест. Получившееся число совпало с исходным. Какое наибольшее количество различных цифр может быть в таком числе?

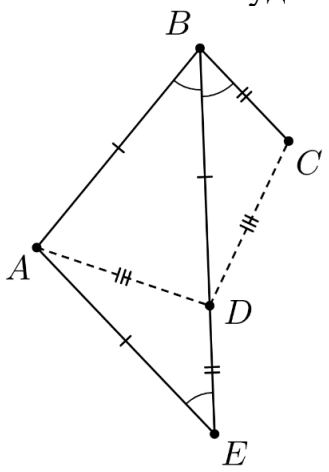
Ответ. 1.

Решение. Обозначим это десятизначное число через $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$. Тогда по условию оно совпадает с числом $\overline{a_2a_4a_6a_8a_{10}a_1a_3a_5a_7a_9}$. Значит, $a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = a_5 = a_{10} = a_9 = a_7 = a_3 = a_6$, то есть все цифры обязаны быть одинаковыми. Число, состоящее из 10 одинаковых цифр, подходит.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что все цифры обязаны быть одинаковыми, но не сказано, что число, состоящее из 10 одинаковых цифр, подходит – баллы не снимаются.

8.2. На биссектрисе острого угла ABC отмечены точки D и E так, что $AB = BD = AE$ и $DE = BC$ (точка D лежит между B и E). Докажите, что $AD = CD$.

Решение. Поскольку $AB = AE$, то треугольник ABE равнобедренный, значит $\angle AEB = \angle ABE$, а поскольку BE – биссектриса угла ABC, то $\angle AEB = \angle ABE = \angle EBC$. Рассмотрим треугольники AED и DBC. Стороны AE и BD, а также DE и BC равны по условию, и углы AED и DBC равны по ранее доказанному. Значит, эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Откуда $AD = CD$, что и требовалось.



Комментарий. Доказано, что $\angle AEB = \angle ABE$ – 2 балла.

8.3. На доске написаны четыре числа: 2, 3, 4 и 6. За один шаг можно выбрать любые три из них, первое умножить на 2, второе – на 3, а третье – на 6 (при этом три старых числа стирают, а на их место записывают три новых). Можно ли через несколько шагов получить на доске четыре равных числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Произведение изначальных чисел на доске равнялось $2^4 \cdot 3^2$, а после каждой операции оно увеличивается в $2 \cdot 3 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^2$ раз, поэтому после n таких операций произведение чисел на доске будет равно $2^{4+2n} \cdot 3^{2+2n}$. Если после нескольких таких операций получились четыре равных числа, то их произведение имеет вид $2^{4x} \cdot 3^{4y}$, для натуральных x и y. Но числа $4+2n$ и $2+2n$ не могут одновременно делится на 4, получаем противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

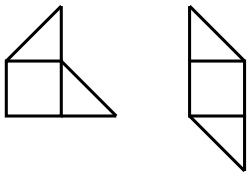
8.4. Найдите значение суммы $S = (1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) + (2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2) + (3^2 + 3 \cdot 4 + 4^2) + \ldots$ $\ldots + (98^2 + 98 \cdot 99 + 99^2) + (99^2 + 99 \cdot 100 + 100^2)$.

Ответ. $100^3 - 1^3 = 999999$.

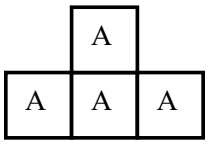
Решение. Заметим, что $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b - a}$. Тогда $S = \dfrac{2^3 - 1^3}{2 - 1} + \dfrac{3^3 - 2^3}{3 - 2} + \ldots + \dfrac{100^3 - 99^3}{100 - 99} = 100^3 - 1^3 = 999999$.

Комментарий. Ответ записан в виде $100^3 - 1^3$ – баллы не снимаются.

8.5. Назовем *квадроугольником* фигуру, которая состоит из клетки и двух примыкающих к ней треугольников, каждый из которых является половиной клетки. Ниже приведены примеры двух квадроугольников.



Можно ли разрезать клетчатую фигуру, состоящую из 4 клетчатых квадратов А размера 7×7, составленных в виде фигуры т-тетрамино (см. рисунок) на квадроугольники?



Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску клеток заданной фигуры (пусть для определенности угловые клетки чёрные). Заметим, что каждый квадроугольник содержит ровно одну белую и ровно одну чёрную клетки. Если бы фигуру можно было бы разрезать на квадроугольники, то в ней было бы одинаковое количество чёрных и белых клеток. Однако в трёх квадратах 7×7 будет 25 чёрных и 24 белых клетки, а в одном – 24 чёрных и 25 белых, то есть всего в фигуре будет 99 чёрных и 97 белых клеток. Значит, разрезать данную фигуру на квадроугольники невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9 класс

9.1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что линейная функция $y = f(x+1) - f(x)$ обращается в ноль только при $x = 2024$. При каком значении аргумента обращается в ноль функция $y = f(x-1) - f(x)$?

Ответ. $x = 2025$.

Решение. Обозначим линейную функцию $f(x+1) - f(x)$ за $g(x)$. По условию имеем $g(2024) = 0$. Заметим, что функция $h(x) = f(x-1) - f(x) = -g(x-1)$. Значит, $h(x) = 0$, тогда и только тогда, когда $-g(x-1) = 0$, что в свою очередь равносильно $x - 1 = 2024$, то есть $x = 2025$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.2. На доске написаны четыре числа: 2, 3, 4 и 9. За один шаг можно выбрать любые три из них, первое умножить на 2, второе – на 4, а третье – на 6 (при этом три старых числа стирают, а на их место записывают три новых). Можно ли через несколько шагов получить на доске четыре равных числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Произведение изначальных чисел на доске равнялось $2^3 \cdot 3^3$, а после каждой операции оно увеличивается в $2 \cdot 4 \cdot 6 = 2^4 \cdot 3^1$ раз, поэтому после n таких операций произведение чисел на доске будет равно $2^{3+4n} \cdot 3^{3+n}$. Если после нескольких таких операций получились четыре равных числа, то их произведение имеет вид $2^{4x} \cdot 3^{4y}$, для натуральных x и y. Но число $3 + 4n$ не может равняться $4x$, так как не делится на 4, получаем противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.3. Найдите значение суммы $S = (1^2 + 1 \cdot 3 + 3^2) + (3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2) + (5^2 + 5 \cdot 7 + 7^2) + \ldots$ $\ldots + (97^2 + 97 \cdot 99 + 99^2) + (99^2 + 99 \cdot 101 + 101^2)$.

Ответ. $\dfrac{101^3 - 1^3}{2} = 515150$.

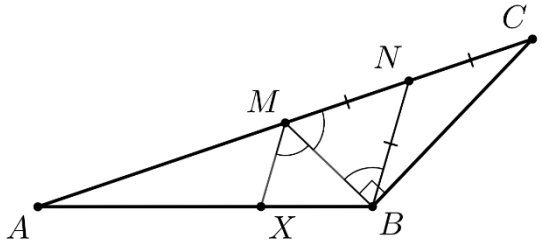
Решение. Заметим, что $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b - a}$. Тогда $S = \dfrac{3^3 - 1^3}{3 - 1} + \dfrac{5^3 - 3^3}{5 - 3} + \ldots + \dfrac{101^3 - 99^3}{101 - 99} = \dfrac{101^3 - 1^3}{2} = 515150$.

Комментарий. Ответ записан в виде $\dfrac{101^3 - 1^3}{2}$ – баллы не снимаются.

9.4. В треугольнике ABC медиана BM образует со стороной BC прямой угол. На стороне AB отмечена точка X так, что $\angle BMC = \angle BMX$. Найдите, чему равно отношение $AX{:}XB$.

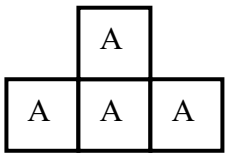
Ответ. 2:1.

Решение. Отметим середину отрезка CM – точку N. Отрезок BN является медианой, проведённой к гипотенузе, прямоугольного треугольника BMC, поэтому $BN = MN$. Тогда треугольник BMN равнобедренный, откуда $\angle NBM = \angle BMC = \angle BMX$. Значит, $BN \parallel MX$. Наконец, по теореме Фалеса $AX{:}XB = AM{:}MN = 2{:}1$.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что медиана $BN \parallel MX$ – 2 балла.

9.5. Взяли четыре клетчатых квадрата размера 7×7 (на рисунке обозначен А) и составили из них фигуру вида т-тетрамино (см. рисунок).



Все клетки исходных квадратов разделили одной из диагоналей на два треугольника. В результате получилось 7·7·4·2 треугольников. Пару таких треугольников назовем *соседями*, если у них есть общий катет. Можно ли разбить все треугольники на непересекающиеся пары соседей?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску клеток заданной фигуры (пусть для определенности угловые клетки чёрные). Заметим, что каждая пара соседей содержит ровно половину белой и ровно половину чёрной клетки. Если бы все треугольники можно было разбить на непересекающиеся пары соседей, то фигура содержала бы одинаковое количество чёрных и белых клеток. Однако в трёх квадратах 7×7 будет 25 чёрных и 24 белых клетки, а в одном – 24 чёрных и 25 белых, то есть всего в фигуре будет 99 чёрных и 97 белых клеток. Значит, разбить все треугольники на непересекающиеся пары соседей невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10 класс

10.1. Вася написал на доске несколько различных двузначных чисел. Оказалось, что сумма никаких двух из написанных на доске чисел не равна 90. Какое максимальное количество чисел мог написать Вася?

Ответ. 55.

Решение. Заметим, что из каждой из 35 пар чисел 10-80, 11-79, 12-78, …, 44-46 на доске могло быть записано не более одного числа. Значит, по крайней мере 35 двузначных чисел из всех двузначных (от 10 до 99) не будут написаны. То есть на доске будет написано не более 90–35=55 чисел.
Если на доске написать числа 45, 46, 47, …, 99, то сумма никаких двух из них не равна 90, а этих чисел 55.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что может быть выписано не более 55 чисел – 5 баллов.
Приведен пример 55 чисел – 2 балла.

10.2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что существуют пары различных чисел (m,k) таких, что $\frac{f(m)}{f(k)}=\frac{m}{k}$. Назовем такие пары *хорошими.* Докажите, что значение выражения $m\cdot k$ во всех хороших парах одинаково.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Тогда $\frac{f(m)}{f(k)}=\frac{am^2+bm+c}{ak^2+bk+c}=\frac{m}{k}$. Домножив на знаменатели, получим $am^2k+bmk+ck=ak^2m+bkm+cm$. Это равенство можно преобразовать к виду $(amk-c)(m-k)=0$. Так как $m\neq k$, то $amk=c$, откуда произведение $mk=\frac{c}{a}$ – одинаковое для любой пары.

Комментарий. При преобразовании равенств произведено деление обеих частей равенства на $(m-k)$, но не указано, что это выражение ненулевое – снять 2 балла.

10.3. На доске были написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого исходного числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_1. Вася вычел из каждого исходного числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_2. Наконец Андрей вычел из каждого исходного числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_3. Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. $\frac{S_3-2S_2+S_1}{2}$.

Решение. Пусть сумма всех чисел на доске равна S, их количество равно n, а количества нулей, единиц, двоек на доске равны соответственно a, b, c. Тогда $S_1=S-n+2a$, так как каждое число, отличное от нуля, уменьшилось на 1, а ноль, напротив, превратился в

единицу, то есть оказался на 2 больше, чем 0–1. Так же $S_2 = S - 2n + 4a + 2b$, так как каждое число, отличное от нуля и единицы, уменьшилось на 2, а ноль, напротив, превратился в двойку, а единица превратилась в единицу. Наконец, аналогично, $S_3 = S - 3n + 6a + 4b + 2c$. Отсюда можно получить, что $c = \frac{S_3 - 2S_2 + S_1}{2}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Найдены формулы для S_1, S_2, S_3 – 5 баллов.

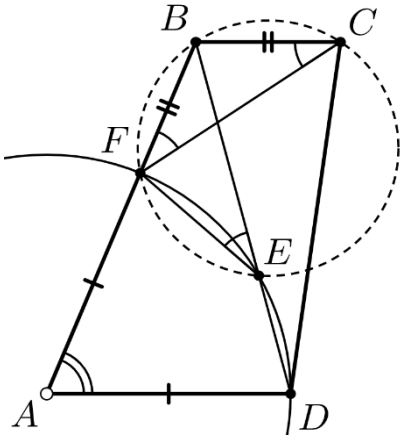
10.4. Есть 30 нечётных натуральных чисел. Оказалось, что их можно разбить на 10 троек так, что в каждой тройке одно из чисел равно произведению двух других. Может ли сумма этих 30 чисел равняться 2024?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что описанная ситуация возможна. Пусть в одной из троек будут числа a, b, ab. Тогда их сумма есть $a + b + ab = (a+1)(b+1) - 1$. Так как числа a, b – нечётные, то произведение $(a+1)(b+1)$ делится на 4, как произведение двух чётных чисел. Тогда $a + b + ab = 4k - 1$. Пусть в i-й тройке $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ сумма равна $4k_i - 1$. Тогда сумма всех 30 чисел равна $(4k_1 - 1) + (4k_2 - 1) + \ldots + (4k_{10} - 1) = 4M - 10$. Но $4M - 10 \neq 2024$, так как число 2034 не делится на 4. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна сумме длин оснований. Окружность Ω с центром в точке A, проходящая через D, пересекает отрезки BD и BA в точках E и F соответственно. Докажите, что точки B, C, E, F лежат на одной окружности.



Решение. Так как $AB = AD + BC$ и $AF = AD$, то $BF = BC$ и треугольник BFC равнобедренный. Обозначим $\angle BAD = 2\alpha$. В окружности Ω угол FED вписанный, а соответствующий ему центральный угол равен $360° - 2\alpha$, поэтому $\angle FED = 180° - \alpha$ и смежный с ним $\angle FEB = \alpha$. Основания BC и AD трапеции параллельны, значит, $\angle ABC = 180° - 2\alpha$, а раз треугольник BFC равнобедренный, то $\angle BCF = \angle BFC = \alpha$. Таким образом, $\angle BCF = \angle BEF$, а значит, точки B, C, E, F лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что треугольник BFC равнобедренный – 2 балла.

11 класс

11.1. При каком наименьшем n в некоторые клетки таблицы $n \times n$ можно вписать числа от 1 до 9 (каждое из этих девяти чисел ровно один раз) так, чтобы сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любом столбце были бы меньше 11?

Ответ. 5.

Решение. Каждое из чисел от 5 до 9 должно находиться в отдельной строке, так как сумма даже двух любых из этих чисел не меньше 11. Значит, $n \geq 5$. Для n=5 можно построить пример такой таблицы.

9	1			
	8	2		
		7	3	
			6	4
				5

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что $n \geq 5$ – 4 балла.
Приведен пример таблицы для n=5 – 3 балла.

11.2. Найдите значение суммы
$S = (1^2 + 1\cdot4 + 4^2) + (4^2 + 4\cdot7 + 7^2) + (7^2 + 7\cdot10 + 10^2) + \ldots \ \ldots + (94^2 + 94\cdot97 + 97^2) + (97^2 + 97\cdot100 + 100^2)$

Ответ. $\frac{100^3 - 1^3}{3} = 333333$.

Решение. Заметим, что $a^2 + ab + b^2 = \frac{b^3 - a^3}{b - a}$. Тогда
$S = \frac{4^3 - 1^3}{4 - 1} + \frac{7^3 - 4^3}{7 - 4} + \ldots + \frac{100^3 - 97^3}{100 - 97} = \frac{100^3 - 1^3}{3} = 333333$.

Комментарий. Ответ записан в виде $\frac{100^3 - 1^3}{3}$ – баллы не снимаются.

11.3. Есть 100 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100 (каждое – по одному разу). Можно ли их разбить на 25 наборов по 4 карточки так, чтобы в каждом из наборов число на одной из карточек было бы либо в 2 раза, либо в 5 раз меньше, чем сумма чисел трех оставшихся карточек набора?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что разбиение возможно. Тогда заметим, что в каждом из наборов сумма чисел на всех 4 карточках делится на 3. Но тогда и сумма всех 100 чисел должна делиться на 3. Но сумма чисел от 1 до 100 равна 5050 и на 3 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

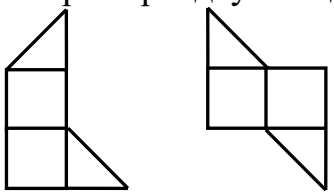
11.4. Дан шестиугольник, описанный около окружности. Назовём его сторону *а хорошей*, если треугольник, сложенный из неё и двух её соседних сторон, является прямоугольным с гипотенузой *а*. Может ли этот шестиугольник иметь хотя бы три хорошие стороны?

Ответ. Не может.

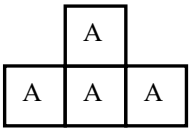
Решение. Пусть шестиугольник имеет хотя бы три хорошие стороны. Обозначим последовательно стороны шестиугольника $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Так как он описанный, то $x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6$. Можем считать, что x_1 – одна из хороших сторон. Если сторона x_k хорошая, то $x_k > x_{k-1}$ и $x_k > x_{k+1}$ (считаем $x_i = x_{i+6}$), поскольку гипотенуза больше катетов. Таким образом, хорошие стороны не могут быть соседними, откуда следует, что три хорошие стороны могут быть, только если это x_1, x_3, x_5. Но тогда $x_1 > x_2$, $x_3 > x_4$, $x_5 > x_6$, значит, $x_1 + x_3 + x_5 > x_2 + x_4 + x_6$, получаем противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Замечено, что хорошая сторона больше своих соседей – 1 балл.
Используется без доказательства утверждение о том, что в описанном шестиугольнике суммы сторон через одну равны – баллы не снимаются.
Доказано, что в описанном шестиугольнике суммы сторон через одну равны – баллы не добавляются.

11.5. Назовем *квадроугольником* фигуру, которая состоит из двуклеточного прямоугольника и двух примыкающих к нему треугольников, каждый из которых является половиной клетки (по одному треугольнику к каждой из двух клеток прямоугольника). Ниже приведены примеры двух квадроугольников.



Можно ли разрезать клетчатую фигуру, состоящую из 4 клетчатых квадратов А размера 9×9, составленных в виде фигуры т-тетрамино (см. рисунок) на квадроугольники?



Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску клеток заданной фигуры (пусть для определенности угловые клетки чёрные). Заметим, что каждый квадроугольник содержит ровно 1,5 белых и ровно 1,5 чёрных клетки. Если бы фигуру можно было бы разрезать на квадроугольники, то в ней было бы одинаковое количество чёрных и белых

клеток. Однако в трёх квадратах 9×9 будет 41 чёрная и 40 белых клеток, а в одном – 40 чёрных и 41 белая, то есть всего в фигуре будет 163 чёрных и 161 белая клетки. Значит, разрезать данную фигуру на квадроугольники невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Олмат

онлайн-школа · олимпиадная математика, программирование, экономика, физика

Учим детей с 0 по 11 класс математике, программированию, экономике и физике — глубже школьной программы, онлайн, с преподавателями из МГУ, МФТИ и ВШЭ. Каждый год у нас занимается больше 1000 учеников, и они поступают в сильные школы и вузы: во Вторую школу, 179-ю, СУНЦ МГУ, «Воробьёвы горы», на смены в «Сириус».



Преподаватели и кураторы Олмат

Как у нас устроено

- **Группы строго по уровню.** От тех, кто начинает с нуля, до призёров всероса — ребёнок попадает к равным по силе, а не скучает и не тонет.
- **Живые занятия, а не записи.** Онлайн один-два раза в неделю, каждую домашнюю работу проверяет преподаватель, раз в месяц — тренировочная олимпиада.
- **Отбор преподавателей.** Из тридцати кандидатов берём одного. Среди преподавателей — победители и призёры всероса, студенты и выпускники МГУ, МФТИ и ВШЭ.

132	180	9 из 10	5,0
диплома финала ВсОШ 2025/26	призёров Мат-праздника в 2026	поступают в топ-вузы по олимпиадам	рейтинг в Яндексе, 500+ отзывов в ВК

Ребёнок сам захочет решать — и дойдёт до диплома

«Сам бежит к компьютеру, ещё дорешивает после занятия» — про это пишет каждый седьмой родитель в отзывах. Начать можно с базового курса: 0–9 класс, есть лицензия — налоговый вычет или оплата маткапиталом.

olmath.ru/zoomgroups

На странице — программа, расписание и цены.

Не готовы записываться — подпишитесь

В каналах Олмат — разборы олимпиадных задач, анонсы туров и подборки для самостоятельной подготовки.

MAX: **max.ru/id9715500368_biz**

Telegram: **t.me/olmath**

MAX

Telegram

Материал подготовлен школой или организатором олимпиады и публикуется в справочных целях. Олмат не является его автором.