ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

Задачи 7.5 и 10.5 предложены А.Д. Терёшиным, задача 7.1 предложена О.И. Южаковым, задача 9.3 предложена А.Б. Купавским, задача 10.3 предложена А.А. Чироновым.

6 класс

6.1. Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны, и каждая является либо суммой, либо разностью двух других цифр числа. Объясните свой ответ.

Ответ. 9871.

Решение. Наибольшее четырехзначное число с различными цифрами начинается с 987. Но тогда последняя цифра должна равняться 1. При этом 9=8+1, 8=7+1, 7=8–1, 1=9–8.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 5 баллов.

6.2. У фокусника есть 10 цилиндров, в одном из которых сидит кролик. За один вопрос можно указать на 1 или 2 цилиндра, и спросить, сидит ли там кролик (нам ответят «да» или «нет»). Можно ли за 5 вопросов гарантированно найти цилиндр с кроликом?

Ответ. Можно.

Решение. Первые 4 вопроса зададим про 4 пары разных цилиндров. Если нам ответили «да» на один из вопросов, то это означает, что мы нашли два цилиндра, один из которых пустой, а в другом сидит кролик. Если же нам 4 раза ответили «нет», то оставшиеся два цилиндра таковы, что один из них пустой, а в другом сидит кролик. В любом случае для таких двух цилиндров мы зададим вопрос про один из них. Если нам ответят «да», то кролик в указанном цилиндре, если «нет», то в оставшемся.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6.3. Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59. Поезд отправился утром до 12:00, когда часы показывали время $\overline{ab}:\overline{cd}$, а прибыл тогда, когда часы показывали время $\overline{cd}:\overline{ab}$. Сколько времени поезд находился в пути, если известно, что он ехал больше 6, но меньше 7 часов?

Ответ. 6 часов 53 минуты.

Решение. Предположим, что поезд ехал 6 часов и y минут. Из условия следует, что $\overline{cd} > \overline{ab}$. Значит, для того чтобы минуты $\overline{cd}$ на часах стали минутами $\overline{ab}$ должно выполняться равенство: $\overline{cd} + y = 60 + \overline{ab}$. А чтобы часы $\overline{ab}$ стали

часами $\overline{cd}$ – равенство $\overline{ab} + 6 + 1 = \overline{cd}$. Из этого равенства следует, что $\overline{cd}$ больше $\overline{ab}$ на 7. Значит, $y = 53$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 4 балла.

6.4. Клетчатый квадрат 27 см × 27 см (длина стороны клетки 1 см), разрезали на 5 клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Могло ли оказаться, что суммарная длина разрезов внутри квадрата равна 82 см?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть P – периметр одного из этих прямоугольников, тогда $5P$ – их суммарный периметр. В эту сумму входит периметр квадрата, а также удвоенная сумма длин разрезов. Однако число 108 + 164=272 не делится на 5.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6.5. На праздник в классе открыли 5 коробок с конфетами и расположили эти коробки в ряд. Назовём конфеты *соседними*, если они лежат в одной коробке или в двух соседних коробках. В конце праздника оказалось, что в каждой коробке осталась хотя бы одна конфета, и у любой оставшейся конфеты есть либо 4, либо 8 соседних конфет. Сколько конфет осталось в конце праздника?

Ответ. 14.

Решение. Суммарно в первой и второй коробках либо 5 конфет (если у конфеты A из первой коробки 4 соседних), либо 9 конфет (если у конфеты A 8 соседних). Второе невозможно, так как тогда у конфеты B из второй коробки больше 8 соседних: все 7 соседних для A (без B), сама конфета A и ещё хотя бы одна конфета из третьей коробки. Тогда у конфеты B будет 4 соседних конфеты из первой и второй коробок, и, значит, 4 конфеты из третьей коробки. Аналогично первому рассуждению суммарно в четвёртой и пятой коробках – 5 конфет. Общее число конфет равно 5 + 4 + 5 = 14.

Комментарий.

Верный ответ (только общее количество конфет) без обоснования – 0 баллов.

Обоснования не приведены, но написано равенство 5 + 4 + 5 = 14 – 2 балла.

Ответ получен рассмотрением примера – 2 балла.

7 класс

7.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта каждый из мальчиков послал по одной открытке некоторым девочкам из кружка (хотя бы одной). Оказалось, что любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 9.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 10, то найдется мальчик, который послал не меньше 10 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток, и каждый – хотя бы одну). Значит, девочек на кружке не меньше 10. То есть всего в кружке не меньше 20 школьников. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 9. В кружке может быть ровно 9 мальчиков и 10 девочек. Мальчики могут послать 1,2, 3 …, 9 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше девяти – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 9 мальчиков – 3 балла.

7.2. Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59. Поезд отправился утром до 12:00, когда часы показывали время $\overline{ab}:\overline{cd}$, а прибыл тогда, когда часы показывали время $\overline{cd}:\overline{ab}$. Сколько времени поезд находился в пути, если известно, что он ехал больше 8, но меньше 9 часов?

Ответ. 8 часов 51 минуту.

Решение. Предположим, что поезд ехал 8 часов и y минут. Из условия следует, что $\overline{cd} > \overline{ab}$. Значит, для того чтобы минуты $\overline{cd}$ на часах стали минутами $\overline{ab}$ должно выполняться равенство: $\overline{cd} + y = 60 + \overline{ab}$. А чтобы часы $\overline{ab}$ стали часами $\overline{cd}$ – равенство $\overline{ab} + 8 + 1 = \overline{cd}$. Из этого равенства следует, что $\overline{cd}$ больше $\overline{ab}$ на 9. Значит, $y = 51$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

7.3. У фокусника есть 10 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на 1 или 2 цилиндра, и спросить, сидит ли там хотя бы один кролик (нам ответят «да» или «нет»). Можно ли за 5 вопросов гарантированно найти цилиндр с кроликом?

Ответ. Можно.

Решение. Первые 3 вопроса зададим про 3 пары разных цилиндров. Если нам ответили «да» на один из вопросов, то это означает, что мы нашли два цилиндра, в которых сидит хотя бы один кролик. Задав два вопроса про каждый из этих цилиндров, мы найдем цилиндр с кроликом. Если же нам 3 раза ответили «нет», то в оставшихся 4 цилиндрах сидят 2 кролика. Нам нужно выбрать два цилиндра (из этих 4) и задать 2 вопроса про каждый из выбранных цилиндров. Если нам хотя бы раз ответят «да», то кролик в указанном цилиндре, если два раза ответят «нет», то в оставшихся 2 цилиндрах сидят 2 кролика.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Клетчатый квадрат 31 см × 31 см (длина стороны клетки 0,5 см), разрезали на 6 клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Могло ли оказаться, что суммарная длина разрезов внутри квадрата равна 80,5 см?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть P – периметр одного из этих прямоугольников. Так как длина стороны клетки 0,5 см, то периметр P будет целым числом. Суммарный периметр прямоугольников разрезания равен $6P$ – четному числу. В эту сумму входит периметр квадрата, а также удвоенная сумма длин разрезов. Однако число 124 + 161 = 285 нечетно.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.5. В каждой клетке таблицы 3 × 3 стоит по одному натуральному числу, причём все девять чисел различны. Известно, что можно вычеркнуть по одному такому числу в каждой строчке так, что в каждой строчке суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу x. Также можно вычеркнуть по одному такому числу в каждом столбце так, что в каждом столбце суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу y. Может ли оказаться, что $x = y$?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что $x = y$. Так как строк и столбцов в таблице 6, а в каждой строке и столбце мы выбирали по одному числу, то «выбранных» чисел не больше 6 (из 9, стоящих в таблице). Поэтому найдётся число a, которое не было выбрано. Тогда в строке с числом a будет стоять число $x - a$,

а в столбце с числом a будет стоять число $y-a$. Но мы предположили, что $x=y$. Значит, $x-a=y-a$. В таблице нашлись одинаковые числа, но все числа по условию в таблице различны. Получили противоречие.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8 класс

8.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта каждый из мальчиков послал открытки девочкам из кружка (каждый – хотя бы одну). Оказалось, что каждая девочка получила ровно одну открытку, а любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 4.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 5, то они суммарно послали не меньше 1+2+3+4+5=15 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток, и каждый – хотя бы одну). Значит, девочек кружке не меньше 15 (так как каждая девочка получила одну открытку). То есть всего в кружке не меньше 20 школьников. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 4. В кружке может быть ровно 4 мальчика и 15 девочек. Мальчики могут послать 1, 2, 3 и 9 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше 4 – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 4 мальчиков – 3 балла.

8.2. В кошельке лежит 100 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей. Каждый из 21 человека подходил к кошельку и клал или брал ровно одну монету этих достоинств. В итоге в кошельке оказалось ровно 120 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей. Верно ли, что кто-то либо взял, либо положил монету достоинством 2 рубля?

Ответ. Верно.

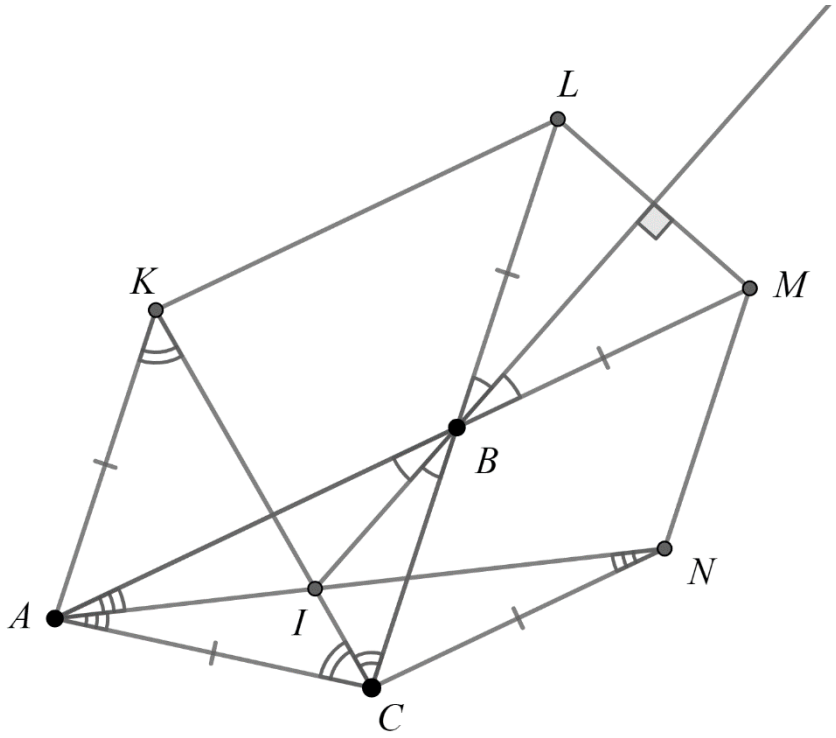
Решение. Предположим, что это не верно. Тогда каждый либо брал, либо клал монету достоинством 1 или 5 рублей. Заметим, что числа 1 и 5 – нечетные. Поэтому каждый раз сумма в кошельке менялась на нечетное число. Поскольку в начале в кошельке лежит 100 рублей – четное число, то после 21

операции в кошельке будет лежать нечетное число рублей. Но 120 – четное число. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.3. Точка I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. На продолжении AI за точку I и на продолжении AB за точку B выбраны соответственно точки N и M так, что $BCNM$ – параллелограмм. Аналогично на продолжении CI за точку I и на продолжении CB за точку B выбраны соответственно точки K и L так, что $BAKL$ – параллелограмм. Докажите, что прямые BI и LM перпендикулярны.



Решение. Центр вписанной в треугольник окружности находится на пересечении его биссектрис. Значит, углы BAN и CAN равны. В силу параллельности прямых CN и AB равны углы BAN и ANC. Значит, треугольник ACN – равнобедренный, и в нем $AC = CN$, откуда $BM = AC$. Аналогично $BL = AC$. Значит, $BM = BL$. Но углы LBM и ABC – вертикальные. Поэтому прямая BI будет также биссектрисой в равнобедренном треугольнике LBM. И, значит, его высотой.

Комментарий.

Обосновано равенство одной или нескольких пар отрезков ($AC = CN$ ($BM = AC$) и/или $AC = AK$ ($BL = AC$)) – 2 балла.
Доказано, что $BM = BL$ – еще 2 балла.

8.4. Какие значения может принимать произведение ab, если известно, что выполняются равенства $a^2 - b^2 = a^3 + b^3$ и $a^3 - b^3 = a^4 + b^4$?

Ответ. 0; –1.

Решение. Перемножим данные равенства крест-накрест. Получим: $(a^2 - b^2)(a^4 + b^4) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$. Следовательно, $b^2a^4 - a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - b^2) = 0$.
Возможны два случая.
1. $a^2b^2 = 0$. Этот случай возможен, например, при $a = b = 0$. Тогда $ab = 0$.
2. $a^2 - b^2 = 0$. Тогда $a^3 + b^3 = 0$, откуда $b = -a$. Подставив это равенство во второе уравнение, получаем: $-2b^3 = 2b^4$. Если $b = 0$, то $ab = 0$. Если же $b \neq 0$, то $b = -1$. Откуда $a = 1$ и $ab = -1$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Один ответ получен рассмотрением примера – 0 баллов.

Оба ответа получены рассмотрением примеров – 2 балла.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

Замечание. Первый случай реализуется и для других пар a, b: $a = 0,\ b = -1$ и $a = 1,\ b = 0$.

8.5. На столе лежат 100 карточек с числами от 1 до 100. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Решение. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет карточки на пары следующим образом: 1-11, 2-12, 3-13, …, 10-20, 21-31, 22-32, …, 89-99, 90-100. Тогда в каждой паре числа отличаются ровно на 10. Каждым ходом второму игроку следует брать карточку из той пары, из которой только что взял карточку первый игрок. Поэтому после каждого хода второго игрока количество пар будет уменьшаться на одну. В конце игры на столе останется одна пара карточек. Числа в ней отличаются на 10. Поэтому второй игрок выиграет.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9 класс

9.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта некоторые мальчики послали открытки девочкам из кружка. Оказалось, что каждая девочка получила ровно одну открытку, а любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 5.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 6, то они суммарно послали не меньше 0+1+2+3+4+5=15 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток). Значит, девочек кружке не меньше 15 (так как каждая девочка получила одну открытку). То есть всего в кружке не меньше 21 школьника. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 5. В кружке может быть ровно 5 мальчиков и 14 девочек. Мальчики могут послать 0, 1, 2, 3 и 8 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше 5 – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 5 мальчиков – 3 балла.

9.2. В кошельке лежит 100 рублей монетами по 1 рублю. Каждый из 50 человек подходил к кошельку и либо брал монету достоинством 1 рубль, либо клал в кошелек монету достоинством 2 или 5 рублей. Могло ли в кошельке в итоге оказаться ровно 201 рубль?

Ответ. Не могло.

Решение. Можно считать, что если человек забрал монету достоинством 1 рубль, то он положил 2 рубля, а забрал 3. А если он положил монету достоинством 5 рублей, то он положил 2 рубля, а потом положил еще 3. Тогда можно считать, что каждый клал в кошелек по 2 рубля, а потом, возможно, клал или забирал 3 рубля. Тогда 50 человек положат в кошелек 100 рублей (в кошельке станет 200 рублей), а потом возьмут или заберут несколько раз по 3 рубля. Но тогда к 200 рублям добавится (вычтется) сумма, кратная 3. Но 201–200=1. Поэтому в кошельке не может оказаться 201 рубль.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.3. Есть набор из 18 чисел: 1, 2, 3, ..., 9 и $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{9}$. Их разбили на 6 групп по 3 числа, и числа в каждой группе перемножили. Какое наибольшее количество из этих 6 произведений могло оказаться целыми числами?

Ответ. 5.

Решение. Докажем, что все 6 произведений не могут быть целыми. Заметим, что произведение всех 18 чисел равно 1. Поэтому, если все 6 произведений будут целыми, то каждое из них равно 1. Рассмотрим тройку чисел, содержащих число $\frac{1}{7}$. Чтобы их произведение было целым, необходимо, чтобы в эту тройку входило число 7. А чтобы это произведение равнялось 1, оставшееся число должно равняться 1. Аналогично, в тройку с числом $\frac{1}{5}$ войдут числа 5 и 1. Осталось заметить, что теперь для числа $\frac{1}{9}$ невозможно подобрать два числа из оставшихся, чтобы их произведение равнялось 1. Поэтому целых произведений не больше 5.
5 целых произведений может получиться, например, при таком разбиении на тройки: $\left(\frac{1}{7}; 7; 1\right)$, $\left(\frac{1}{5}; 5; 1\right)$, $\left(2; 4; \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 8\right)$, $\left(\frac{1}{9}; 9; 3\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 6; \frac{1}{6}\right)$. Целыми будут 5 произведений в первых 5 тройках.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что все 6 произведений не могут быть целыми – 5 баллов.

Приведен пример с 5 целыми произведениями – 2 балла.

9.4. На столе лежат 90 карточек с числами от 1 до 90. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

Решение. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он выделит следующие карточки: с числами от 11 до 20 (включительно), от 31 до 40, от 51 до 60 и от 71 до 80. Выделенных карточек 40. Невыделенные карточки разобьются на 5 групп по 10 карточек (с числами от 1 до 10, от 21 до 30, от 41 до 50, от 61 до 70 и от 81 до 90), причем если две невыделенные карточки находятся в одной группе, то числа на них отличаются не больше чем на 9, а если в разных, то не меньше чем на 11. Всего в игре каждый игрок сделает по 44 хода. Поэтому за свои первые 40 ходов первый игрок должен забрать выделенные карточки (это произойдет быстрее, если второй игрок также заберет какие-то выделенные

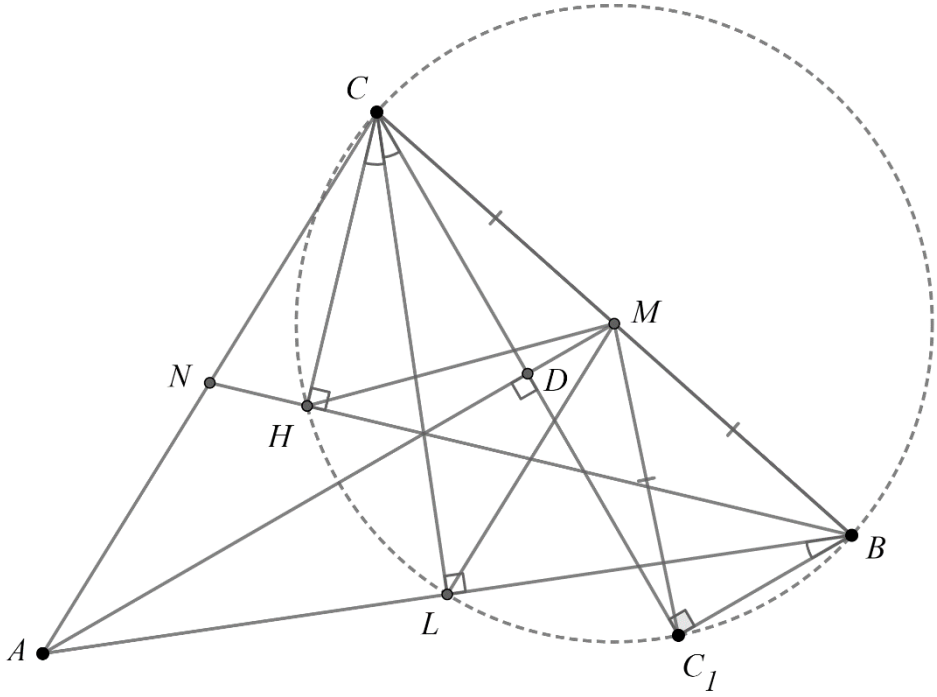
карточки). Поэтому в конце игры останутся две невыделенные карточки, и числа на них будут отличаться не на 10.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Замечание. Существуют и другие стратегии первого игрока.

9.5. Точки L, M и N – соответственно середины сторон AB, BC и AC равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$), где $\angle ACB > 60°$. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AM, а точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую BN. Докажите, что луч ML является биссектрисой угла HMC_1.



Решение. Из симметрии точек C и C_1 относительно AM следует равенство MC_1=MC=MB. Но тогда в треугольнике CC_1B медиана C_1M равна половине стороны CB, к которой она проведена, значит, угол CC_1B – прямой. Также, по условию, прямыми являются углы CHB и CLB (CL – медиана равнобедренного треугольника ACB). Следовательно, точки C_1, L и H лежат на окружности с диаметром CB и центром в точке M. Значит, для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что дуги HL и LC_1 этой окружности равны. А это равносильно равенству вписанных углов HCL и C_1CL. Последнее следует из того, что CH и CC_1 – перпендикуляры к симметричным относительно CL прямым BN и AM.

Комментарий.

Доказана принадлежность точек C_1, L и H одной окружности – 2 балла.

10 класс

10.1. Прямые $y = ax$ и $y = bx$, $a > 0$, $b > 0$ пересекают прямую $y = a$ соответственно в точках A и B. Найдите отношение $a: b$, если известно, что длина отрезка AB равна 4.

Ответ. $a: b = 5$.

Решение. Прямая $y = ax$ пересекают прямую $y = a$ в точке A с координатами $(1;\ a)$. Поэтому точка B имеет координаты $(5;\ a)$. Но точка B лежит на прямой $y = bx$. Поэтому $a = b \cdot 5$, откуда $a: b = 5$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. В правильном 30-угольнике две соседние вершины покрасили в красный цвет, а остальные – в синий. Сколькими способами можно выбрать прямоугольный треугольник с одной красной и двумя синими вершинами?

Ответ. 80.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Угол является прямым, если он опирается на диаметр. Возможны два случая.
1. Угол при красной вершине – прямой. Тогда гипотенузу (диаметр) для каждой из красных вершин можно выбрать (30–4):2=13 способами. Всего в этом случае получаем 2·13=26 способов.
2. Угол при красной вершине – не прямой. Значит, диаметр с концами в красной и синей вершинах является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать 30-3=27 способами. Всего в этом случае получаем 2·27=54 способа.

Общее количество способов есть 26+54=80.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

10.3. Артём записал на доске несколько натуральных чисел, а Саша для каждой пары чисел вычислил сумму их квадратов. Какое наибольшее количество различных чисел мог получить Саша, если оказалось, что все найденные им суммы – простые числа?

Ответ. 2.

Решение. Если на доске записано два четных числа, то сумма их квадратов – четное число, большее 2, то есть составное число. Поэтому четных чисел на доске не более одного. Если на доске записано два нечетных числа, хотя бы одно из которых больше 1, то сумма их квадратов – четное число, большее 2, то есть составное число. Поэтому если на доске есть нечетные числа, то на доске либо одно нечетное число, большее 1, либо нечетные числа равны 1.
Если на доске одно нечетное число, большее 1, и одно четное, то Саша мог получить только одно число. Если же на доске записано одно четное число и несколько единиц, Саша мог получить 2 различных числа.
Покажем, что Саша мог получить две различных суммы. Это могло произойти, например, если Артём записал числа 1, 1 и 2. Тогда Саша получит суммы 2 и 5, которые являются простыми числами.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что различных сумм не больше двух – 5 баллов.

Только пример с двумя различными суммами – 2 балла.

10.4. На столе лежат 118 карточек с числами от 1 до 118. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

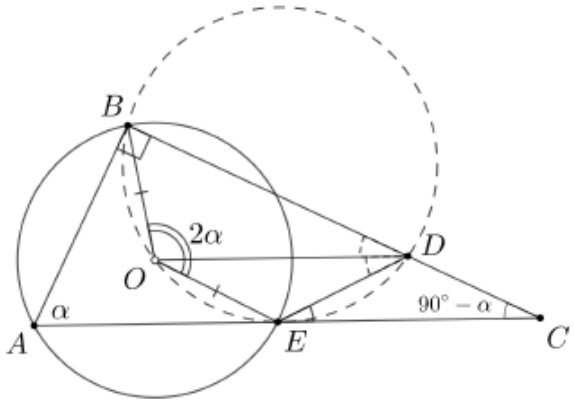
Ответ. Первый.

Решение. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он выделит следующие карточки: с числами от 11 до 20 (включительно), от 31 до 40, от 51 до 60, от 71 до 80, от 91 до 100 и от 111 до 118. Выделенных карточек 58. Невыделенные карточки разобьются на 6 групп по 10 карточек (с числами от 1 до 10, от 21 до 30, от 41 до 50, от 61 до 70, от 81 до 90 и от 101 до 110), причем если две невыделенные карточки находятся в одной группе, то числа на них отличаются не больше чем на 9, а если в разных, то не меньше чем на 11. Всего в игре каждый игрок сделает по 58 ходов. Поэтому за свои 58 ходов первый игрок должен забрать выделенные карточки (это произойдет быстрее, если второй игрок также заберет какие-то выделенные карточки). Поэтому в конце игры останутся две невыделенные карточки, и числа на них будут отличаться не на 10.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ABC = 90°$), на сторонах BC и AC отмечены точки D и E соответственно так, что $CD = DE$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABE лежит на биссектрисе угла BDE.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABE и $\angle BAC = \alpha$ (см. рис.). Тогда $\angle ACB = \angle CED = 90° - \alpha$. Значит, $\angle BDE = 180° - 2\alpha = 180° - \angle BOE$. Поэтому четырёхугольник $BOED$ вписанный. Значит, углы BDO и EDO равны, как вписанные, опирающиеся на равные хорды $OB = OE$.

Комментарий.

Доказана вписанность четырёхугольника $BOED$ – 3 балла.

11 класс

11.1. В правильном 30-угольнике одну вершину покрасили в красный цвет, а остальные – в синий. Сколькими способами можно выбрать прямоугольный треугольник с одной красной и двумя синими вершинами?

Ответ. 42.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Угол является прямым, если он опирается на диаметр. Возможны два случая.
1. Угол при красной вершине – прямой. Тогда гипотенузу (диаметр) можно выбрать (30–2):2=14 способами.
2. Угол при красной вершине – не прямой. Значит, диаметр с концами в красной и синей вершинах является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать 30–2=28 способами.
Всего получаем 28+14=42 способа.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

11.2. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 и 102. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, среднее арифметическое которых – целое число, стереть эти числа и вместо них записать на доску их среднее арифметическое. За какое наименьшее число операций можно оставить на доске только одно число?

Ответ. 2.

Решение. Так как среднее арифметическое написанных чисел есть $\frac{1+2+\cdots+100+102}{101} = 50 + \frac{102}{101} = 51 + \frac{1}{101}$ нецелое число, то за одну операцию сделать требуемое не удастся.
Покажем, как оставить на доске одно целое число за две операции. Возьмем сначала числа от 1 до 99. Стерев эти числа, запишем их среднее арифметическое, равное 50. Теперь на доске остались три числа: 50, 100 и 102. Их среднее арифметическое есть 84.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

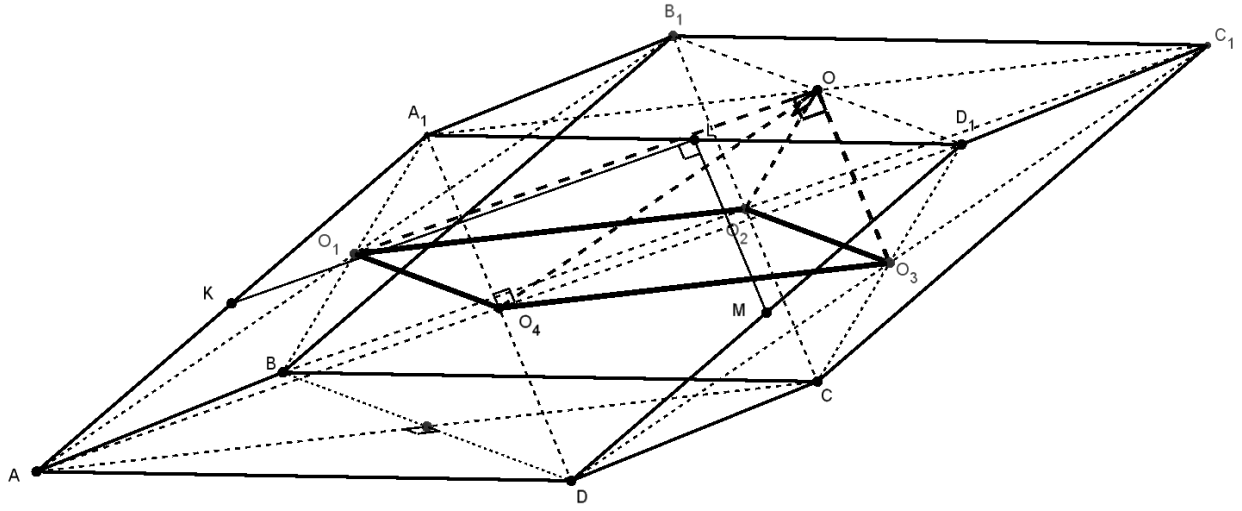
Доказано, что за одну операцию нельзя оставить на доске одно число – 2 балла.

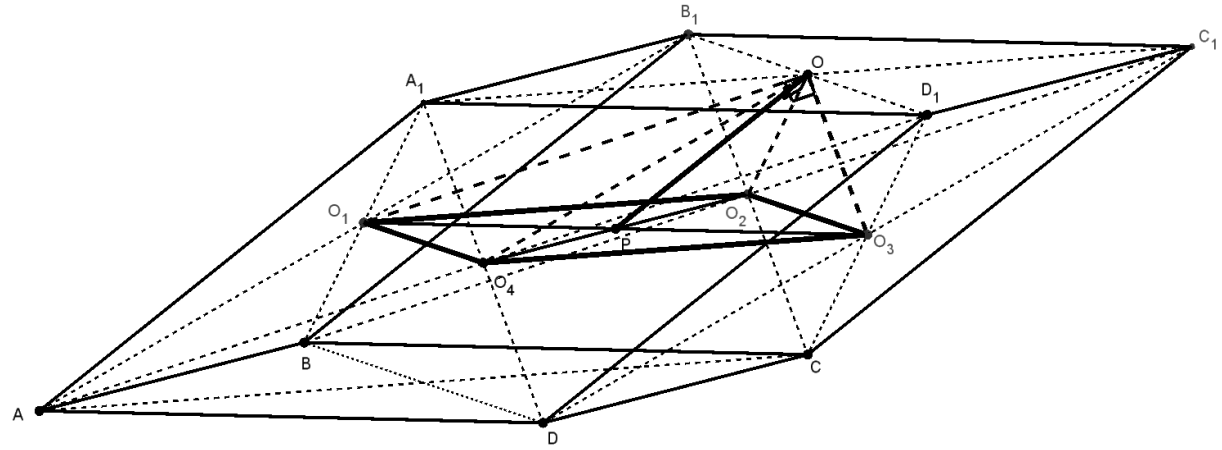
Показано, как за две операции оставить на доске одно число – 5 баллов.

11.3. Дан непрямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O, O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры граней $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A. Известно, что углы O_1OO_3 и O_2OO_4 – прямые. Докажите, что четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ – прямоугольник.

Первое решение. Пусть K, L, M – соответственно середины рёбер AA_1, A_1D_1, D_1D параллелепипеда. Из параллельности отрезков O_1O и KL, а также OO_3 и LM и условия задачи следует перпендикулярность средних линий KL и LM соответственно треугольников AA_1D_1 и A_1D_1D, то есть перпендикулярность диагоналей AD_1 и A_1D параллелограмма DD_1A_1A Значит, этот параллелограмм – ромб, и $A_1D_1 = AA_1$. Аналогично доказывается равенство рёбер A_1B_1 и AA_1. Итак, все рёбра параллелепипеда – равны. Тогда в ромбе $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. Но стороны четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ параллельны этим диагоналям (например, O_1O_2 – средняя линия треугольника AB_1C). Значит, четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ – прямоугольник.

Второе решение. Угол O_1OO_3 – прямой, следовательно, $OP = \frac{O_1O_3}{2}$, где P – точка пересечения диагоналей параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$. Аналогично, $OP = \frac{O_2O_4}{2}$. Отсюда следует равенство диагоналей O_1O_3 и O_2O_4 параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$. А это означает, что он – прямоугольник.





Замечание. Первое решение даёт полное описание структуры параллелепипеда. Второе решение показывает, что в качестве точки O можно было взять произвольную точку, не лежащую в плоскости $O_1O_2O_3$.

Комментарий. Доказано равенство рёбер параллелепипеда – 3 балла.

11.4. Какие значения может принимать сумма $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z$, если известно, что выполняются равенства $\cos 2x = \operatorname{tg} y + 1$, $\cos 2y = \operatorname{tg} z + 1$, $\cos 2z = \operatorname{tg} x + 1$?

Ответ. 0 или 3.

Решение. Перепишем равенства в виде $-2\sin^2 x = \operatorname{tg} y$, $-2\sin^2 y = \operatorname{tg} z$, $-2\sin^2 z = \operatorname{tg} x$.

1. Если хотя бы один из синусов от x, y или z равен нулю, то остальные синусы также равны нулю. Тогда $\cos 2x = \cos 2y = \cos 2z = 1$. Откуда $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 3$. Этот случай реализуется, например, если $x = y = z = 0$.

2. Если синусы от x, y и z отличны от нуля, то перемножим три переписанных равенства. После преобразования получим $\sin 2x \cdot \sin 2y \cdot \sin 2z = -1$, откуда $|\sin 2x| = |\sin 2y| = |\sin 2z| = 1$. Значит, $\cos 2x = \cos 2y = \cos 2z = 0$, и

$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$. Этот случай реализуется, например, если $x = y = z = -\frac{\pi}{4}$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Оба ответа получены подбором – 1 балл.

Обосновано найден только один ответ из двух – 3 балла.

11.5. На столе лежат 170 карточек с числами от 1 до 170. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10 или на число, делящееся на 11. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Первое решение. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет карточки с числами от 6 до 165 на пары следующим образом: 6-16, 7-17, …, 15-25, 26-36, 27-37, …, 35-45, …, 155-165. Тогда в каждой такой паре числа отличаются ровно на 10. Карточки с числами от 1 до 5 и от 166 до 170 ему нужно разбить на пары так: 1-166, 2-167, 3-168, 4-169, 5-170. В каждой такой паре числа отличаются ровно на 165, то есть на число, делящееся на 11. Каждым ходом второму игроку следует брать карточку из той пары, из которой только что взял карточку первый игрок. Поэтому после каждого хода второго игрока количество пар будет уменьшаться на одну. В конце игры на столе останется одна пара карточек. Числа в ней отличаются на 10 или на число, делящееся на 11. Поэтому второй игрок выиграет.

Второе решение. Докажем, что второй игрок может добиться того, чтобы остались две карточки с числами, разность которых делится на 11. Заметим, что есть по 16 карточек, числа на которых имеют остатки 1, 2, 3, 4, 5 при делении на 11 и по 15 карточек, с числа на которых имеют остатки 0, 6, 7, 8, 9, 10 при делении на 11. Для карточек с остатками 1-5 второй игрок должен убирать карточку с тем же остатком. Первый раз для остатка 0 нужно убрать карточку с остатком 6 (и наоборот), далее с тем же остатком. Аналогично для 7 и 8, 9 и 10. Тогда после какого-то хода второго чисел с каждым остатком будет чётное количество.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Олмат

онлайн-школа · олимпиадная математика, программирование, экономика, физика

Учим детей с 0 по 11 класс математике, программированию, экономике и физике — глубже школьной программы, онлайн, с преподавателями из МГУ, МФТИ и ВШЭ. Каждый год у нас занимается больше 1000 учеников, и они поступают в сильные школы и вузы: во Вторую школу, 179-ю, СУНЦ МГУ, «Воробьёвы горы», на смены в «Сириус».



Преподаватели и кураторы Олмат

Как у нас устроено

- **Группы строго по уровню.** От тех, кто начинает с нуля, до призёров всероса — ребёнок попадает к равным по силе, а не скучает и не тонет.
- **Живые занятия, а не записи.** Онлайн один-два раза в неделю, каждую домашнюю работу проверяет преподаватель, раз в месяц — тренировочная олимпиада.
- **Отбор преподавателей.** Из тридцати кандидатов берём одного. Среди преподавателей — победители и призёры всероса, студенты и выпускники МГУ, МФТИ и ВШЭ.

132	180	9 из 10	5,0
диплома финала ВсОШ 2025/26	призёров Мат-праздника в 2026	поступают в топ-вузы по олимпиадам	рейтинг в Яндексе, 500+ отзывов в ВК

Ребёнок сам захочет решать — и дойдёт до диплома

«Сам бежит к компьютеру, ещё дорешивает после занятия» — про это пишет каждый седьмой родитель в отзывах. Начать можно с базового курса: 0–9 класс, есть лицензия — налоговый вычет или оплата маткапиталом.

olmath.ru/zoomgroups

На странице — программа, расписание и цены.

Не готовы записываться — подпишитесь

В каналах Олмат — разборы олимпиадных задач, анонсы туров и подборки для самостоятельной подготовки.

MAX: **max.ru/id9715500368_biz**

Telegram: **t.me/olmath**

MAX

Telegram

Материал подготовлен школой или организатором олимпиады и публикуется в справочных целях. Олмат не является его автором.