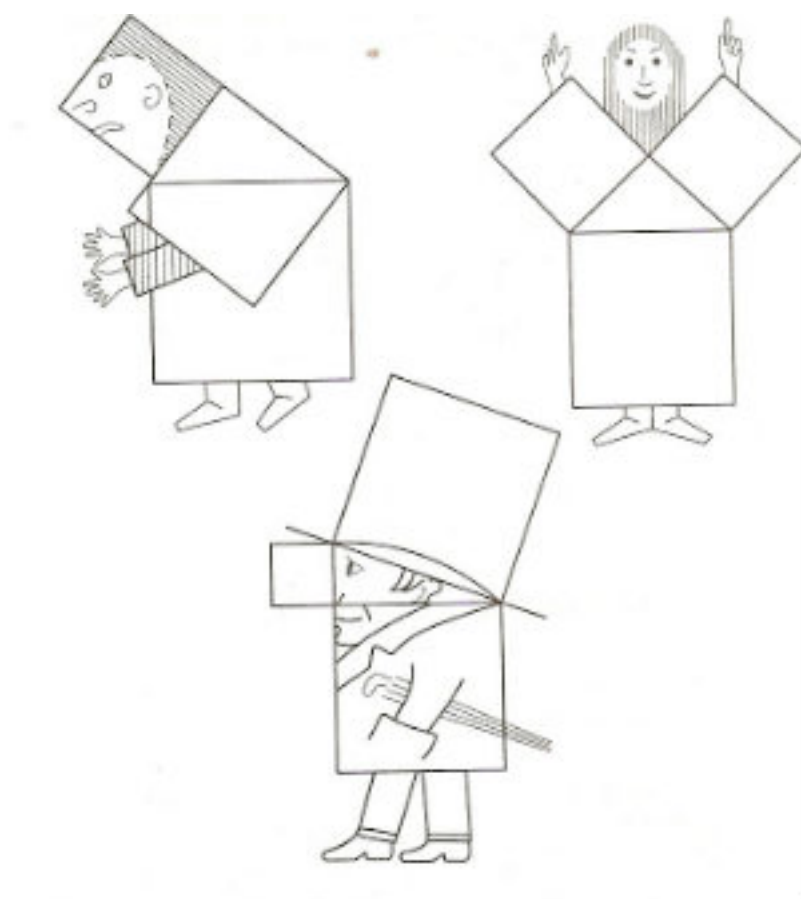


Пятьдесят седьмая школа

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

8 КЛАСС



2015/2016 уч. год

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ПОВТОРЕНИЕ	3
Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ.	19
2.2 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ.....	21
2.3 ПРИМЕРЫ НА ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ	21
Глава 3. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ	25
3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ.....	25
3.2 ФУНКЦИЯ $Y = \sqrt{X}$	26
3.3 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ	27
3.4 КАК НАЙТИ КОРЕНЬ БЕЗ ТАБЛИЦ И КАЛЬКУЛЯТОРА ИЛИ ЧЕМУ УЧИЛИ ВАШИХ БАБУШЕК И ДЕДУШЕК.....	31
Глава 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	36
4.1 ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	36
4.2 НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ	36
4.3 ЕЩЁ РАЗ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ	37
4.4 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	37
4.5 ТЕОРЕМА ВЬЕТА.....	39
4.6 УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ.....	41
4.7 СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	42
4.8 РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ	43
4.9 ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	45
5.1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ	48
5.2 СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ.....	48
5.3 ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	49
5.4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ	51
Глава 6. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ.....	54
Глава 7. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	58
Глава 8. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ.....	63
8.1 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ	63
8.2 ПАРАЛЛЕЛОГРАММ	65
8.3 РОМБ	66
8.4 ПРЯМОУГОЛЬНИК. КВАДРАТ.....	67
8.5 СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.....	68
8.6 ТРАПЕЦИЯ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ.....	69
8.7 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ	71
Глава 9. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.....	73
9.1 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА	73
9.2 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ.	75
9.3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ.....	77
9.4 ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ	80
9.5 ЗАДАЧИ ИЗ СБОРНИКА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА	81
9.6 ЗАДАЧИ ИЗ ИПС «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ» Р. К. ГОРДИНА	82
Глава 10. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ	84
10.1 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) + a$	84
10.2 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x - a)$	86
10.3 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -f(x)$	87
10.4 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$	88
10.5 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) $	88
ПРИЛОЖЕНИЕ	90
1. ГОРОДСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ	90
2. АДМИНИСТРАТИВНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ 2012/13 уч. год	98
3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ГЕОМЕТРИИ.....	100

Глава 1. ПОВТОРЕНИЕ

1.1. Найдите:

- А) 23% от 4,5; Б) 77% от 55; В) 58% от 22,3; Г) 34,1% от 1010; Д) 9,2% от 4,5;
Е) 20% от 45,5; Ё) 45% от 340; Ж) 23,87% от 550; З) 1,034% от 320.

1.2. Найдите целое, если:

- А) 13,1% равны 7,467; Б) 17% равны 42,5; В) 13% равны 74,1; Г) 87% равны 1392;
Д) 123% равны 73,8; Е) 150% равны 225; Ё) 30% равны 33; Ж) 12,34% равны 148,08;
З) 0,067% равны 0,8375.

1.3. Найдите, сколько процентов составляет первое число от второго.

- А) 21 от 70; Б) 16 от 50; В) 37 от 1000; Г) 15 от 60; Д) 3 от 60; Е) 1,2 от 1,5; Ё) 25 от 20;
Ж) 150 от 75; З) 57 от 57; И) 30 от 120; Й) 28,8 от 180; К) 2,5 от 20; Л) $0,32$ от $2\frac{2}{3}$;
М) 42 от 120; Н) 1,2 от 15; О) 32,25 от 215; П) 14,4 от 36; Р) 10,8 от 14,4; С) 20,25 от 320;
Т) 42,9 от 214,5; У) 0,325 от 4,7.

1.4. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов 5 рубашек дороже куртки?

1.5. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов 7 рубашек дороже куртки?

1.6. Пиджак дороже брюк на 25%. На сколько процентов брюки дешевле пиджака?

1.7. Куртка дороже пиджака на 60%. На сколько процентов пиджак дешевле куртки?

1.8. Пальто дороже куртки на 150%. На сколько процентов куртка дешевле пиджака?

1.9. Шуба дороже пальто на 100%. На сколько процентов пальто дешевле шубы?

1.10. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь её снизить, чтобы получить первоначальную цену?

1.11. Цена на товар была снижена на 80%. На сколько процентов надо теперь её повысить, чтобы получить первоначальную цену?

1.12. Цена на товар была повышена на 50%. На сколько процентов надо теперь её снизить, чтобы получить первоначальную цену?

1.13. Цена на товар была повышена на 5%. На сколько процентов надо теперь её снизить, чтобы получить первоначальную цену?

1.14. В голосовании приняли участие 60% жителей страны, имеющих право голоса. Известно, что право голоса имеют 83% населения страны. Сколько процентов от населения страны приняли участие в голосовании?

1.15. В голосовании приняли участие 40% жителей страны. Из них за президента проголосовали 95%. Сколько процентов населения реально поддерживают президента?

1.16. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

1.17. Двое рабочих вместе за смену изготавливали 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность на 15%, а второй – на 25%, вместе они стали изготавливать за смену 86 деталей. Сколько деталей за смену изготавливал первоначально каждый рабочий?

1.18. За первую поездку автомобиль израсходовал 20% бензина, имевшегося в баке, затем, за вторую поездку 25%, оставшегося в баке бензина. После этого в баке осталось на 11 литров больше, чем было израсходовано за обе поездки. Сколько литров бензина было первоначально в баке?

1.19. Функция задана формулой $f(x) = -6x + 2$.

А) Найдите $f(-4)$; $f(2)$; $f(0)$;

Б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 0; - 10; 6?

1.20. Функция задана формулой $f(x) = 3x + 8$.

А) Найдите $f(7)$; $f(0)$; $f(-6)$;

Б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 0; - 9; 13?

1.21. Функция задана формулой $f(x) = -9 - 6x$.

А) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 9; - 5; 0;

Б) При каком значении аргумента функция принимает значение, равное 11; - 5; 0?

1.22. Функция задана формулой $f(x) = 4 + 5x$.

А) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 8; - 4; 0;

Б) При каком значении аргумента функция принимает значение, равное 9; - 3; 0?

1.23. Функция задана формулой $f(x) = -7x + 1$.

А) При каком значении аргумента $f(x) = - 62$?

Б) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному - 50.

1.24. Функция задана формулой $f(x) = 8 - 8x$.

А) При каком значении аргумента $f(x) = 6$?

Б) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 20.

1.25. Функция задана формулой $f(x) = -x - 7$.

А) При каком значении аргумента $f(x) = 12$?

Б) Найдите значение функции в точке 15.

1.26. Функция задана формулой $f(x) = 6x + 2$.

А) При каком значении аргумента $f(x) = 2$?

Б) Найдите значение функции в точке -27 .

1.27. Функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 3x + 1$. Найдите $f(0)$, $f(-5)$, $f(4)$, $f(a)$.

1.28. Функция задана формулой $g(x) = 2x^2 - 7x - 1$. Найдите $g(0)$, $g(2)$, $g(-3)$, $g(t)$.

1.29. Найдите нули функции:

А) $y = -3x(x + 9)$; Б) $y = 7x(-1 - 7x)$; В) $y = |x + 2| - 3$;

Г) $y = |2x - 3| - 5$; Д) $f(x) = x^2 - 9$; Е) $f(x) = 16 - x^2$; Ж) $y = x^4 + 2x^2 + 1$; З) $y = x^6 + 1$.

1.30. Не выполняя построений, определите, принадлежат ли точки А и В графику функции (ответ объясните):

А) $y = 12x + 10$; А(- 4; 58), В(20; 250); Б) $y = -8x + 12$; А(- 6; 60), В(12; - 108);

В) $y = -9x - 30$; А(30; - 240), В(- 4; 6); Г) $y = 50 - 4x$; А(-9; 14), В(8; 18);

Д) $y = 4x + 60$; А(- 8; 92), В(80; 380); Е) $y = -x - 55$; А(-60; -115), В(20; -75);

Ж) $y = 9x - 23$; А(- 6; 31), В(15; 112); З) $y = -6 - 5x$; А(- 12; 54), В(-10; -56).

1.31. Для следующих функций найдите, не выполняя построений, координаты точек пересечения графика этих функций с осями координат:

А) $y = 12x + 60$; Б) $y = -7x + 21$; В) $y = 50 - 4x$; Г) $y = -8x - 10$; Д) $y = (2x + 6)(-5x - 1)$;

Ж) $y = (3 - 7x)(6x + 2)$; И) $y = x(x + 1)(9x + 1,8)$;

Й) $y = x(4x + 3)(0,2x + 1,1)$; К) $y = |-5x - 3|$; Л) $y = |7x + 12|$; М) $y = 9 - |7x + 4|$;

Н) $y = 11 - |15x - 8|$; П) $y = |4x - 12| - 7$; Р) $y = |9x + 27| - 6$; С) $y = (8x - 9)^2 - 4$;

Т) $y = (5x + 7)^2 - 49$; У) $y = (2x - 11)^2 + 6$; Ф) $y = 25 + (5x + 9)^2$;

1.32. Найдите область определения функции:

А) $y = 5 - 11x$; Б) $y = \frac{6}{5x + 4}$; В) $y = \frac{x + 6}{9}$; Г) $y = \frac{3x + 1}{3x - 1}$; Д) $y = \frac{5x + 10}{x - 3}$;

Е) $y = \frac{5x - 15}{|x| - 4}$; Ж) $y = \frac{x - 6}{|x| + 2}$; З) $y = \frac{x^2}{x(x + 1)}$; И) $y = \frac{|x| - 8}{|x| - 5}$; К) $y = \frac{4x - 1}{4x^2 - 1}$;

Л) $y = \frac{6 - 11x}{25 + x^2}$; М) $y = \frac{5x - 1}{(4x + 5)(3x - 9)}$; Н) $y = \frac{(5 - x)(3x + 2)}{3x + 2}$; О) $y = \frac{6x - 9}{2x - 3}$;

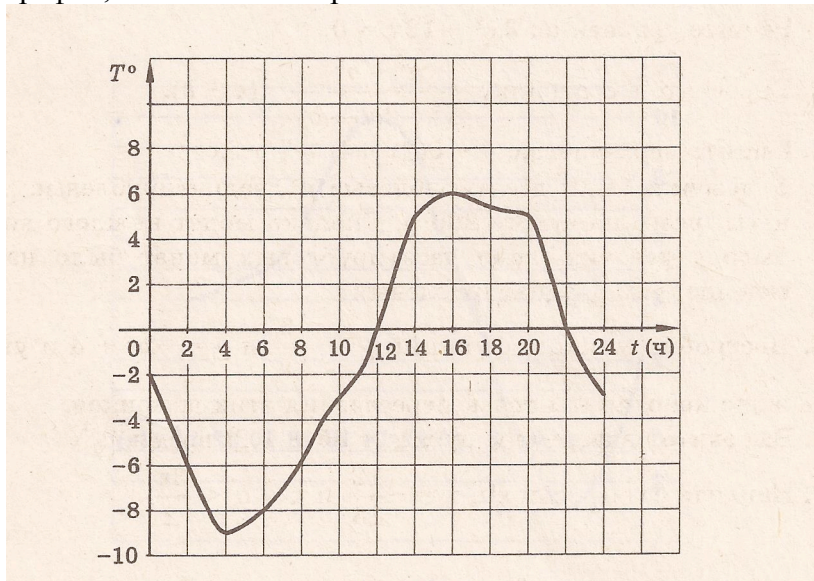
П) $y = \frac{5x - 10}{x^2 + |x|}$; Р) $y = \frac{x(2x - 3)}{3|x| - x^2}$.

1.33. Функция задана формулой $y = -3x + 2$.

А) Найдите значение функции в точках a ; $-4a$; $2p + 3$.

Б) При каком значении аргумента функция принимает значение, равное $-t$; $4 - 5m$?

1.34. На графике показано изменение температуры воздуха в течение суток. Используя график, ответьте на вопросы:



А) Какая температура была в 6 ч? Б) В какое время температура была равна 0°C ; -6°C ?

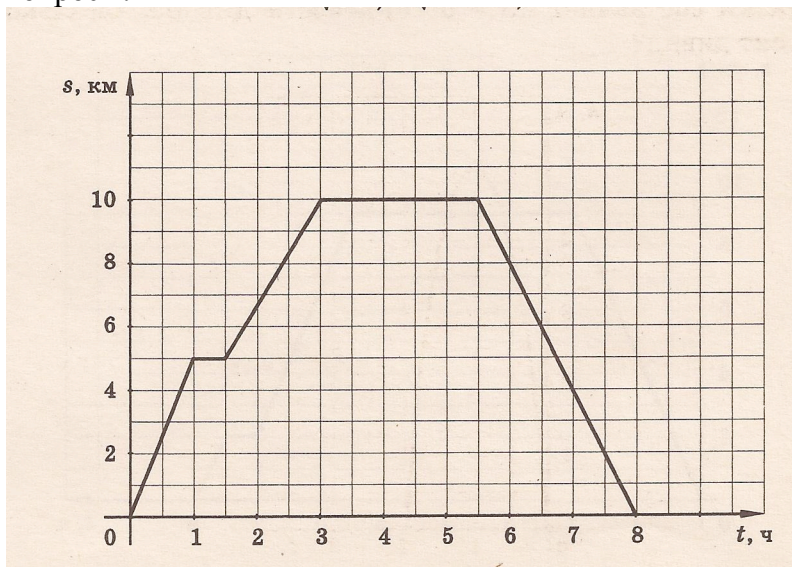
В) Когда в течение суток температура была положительной?

Г) Какова была максимальная температура в этот день?

Д) Когда в течение суток температура повышалась?

Е) Сколько часов температура не превышала -6°C ?

1.35. Туристы вышли из турбазы, дошли до озера и вернулись обратно. На рисунке изображен график движения туристов во время похода. Используя график, ответьте на вопросы:



А) Через сколько часов после начала похода туристы вернулись на турбазу?

Б) На каком расстоянии от базы находится озеро?

В) Сколько километров прошли туристы?

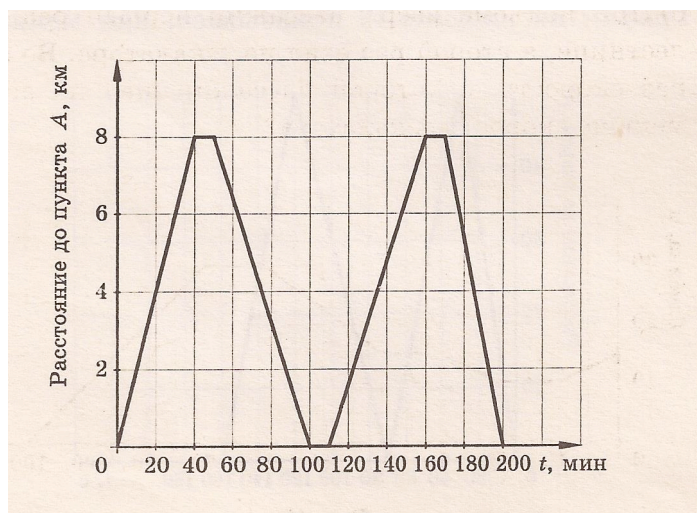
Г) На каком расстоянии от турбазы был сделан первый привал?

Д) Сколько времени длился второй привал?

Е) Сколько времени шли туристы от первого привала до второго?

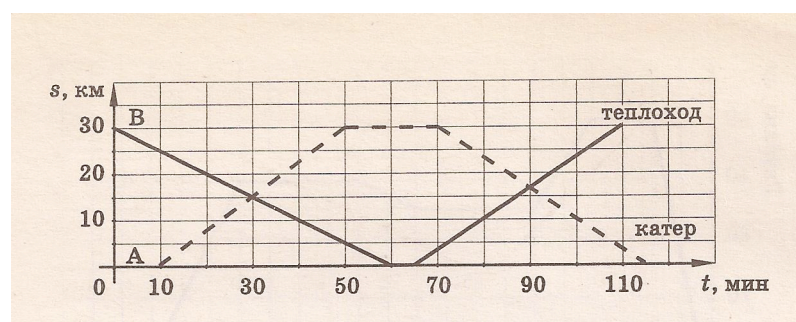
- Ё) Через какое время после начала движения туристы были на расстоянии 6 км от базы?
 Ж) Какова была средняя скорость туристов на всем пути?
 З) Какова была средняя скорость туристов на пути от базы до озера?
 И) Какова была средняя скорость туристов на пути от озера до базы?
 Й) Сколько часов туристы находились от базы на расстоянии не меньше 5 км?

1.36. Паром дважды в сутки переплывает реку от пристани А до пристани В и возвращается обратно. График на рисунке показывает, как меняется расстояние между паромом и пристанью А во время движения. Используя график, ответьте на вопросы:



- А) Какова ширина реки?
 Б) Какое расстояние проплывает паром за сутки?
 В) В каком из четырех рейсов паром проплыл свой путь быстрее всего?
 Г) Какова была скорость парома (в км/ч) при первом возвращении из В в А?
 Д) Какова была средняя скорость парома во втором рейсе?

1.37. Теплоход и почтовый катер курсируют по реке между пристанями А и В, двигаясь навстречу друг другу. На рисунке изображены графики их движения (по горизонтальной оси откладывается время движения в минутах, по вертикальной — расстояние от пристани А в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:



- А) Каково расстояние от А до В?
 Б) Через сколько минут после выхода из А катер встретил теплоход?
 В) Через какое время после первой встречи произошла вторая?
 Г) Какое судно прошло расстояние туда и обратно быстрее и на сколько минут? (Учитывайте только чистое время движения)
 Д) Сколько времени катер находился в В?
 Е) Какое судно и на каком пути (от А к В или от В к А) развило наибольшую скорость? Выразите эту скорость в км/ч.

Ё) Найдите среднюю скорость (в км/ч) движения теплохода на пути В – А – В и среднюю скорость движения катера на пути А – В – А.

1.38. Постройте график функции:

А) $y = -2x + 3$; Б) $y = -6 - 1,5x$; В) $y = -x + 4$; Г) $y = 2x - 8$; Д) $y = -4x - 1$;

Е) $y = 2 - 0,5x$.

1.39. На рисунке 1 представлены графики линейных функций. Для каждой функции определите знаки k и b .

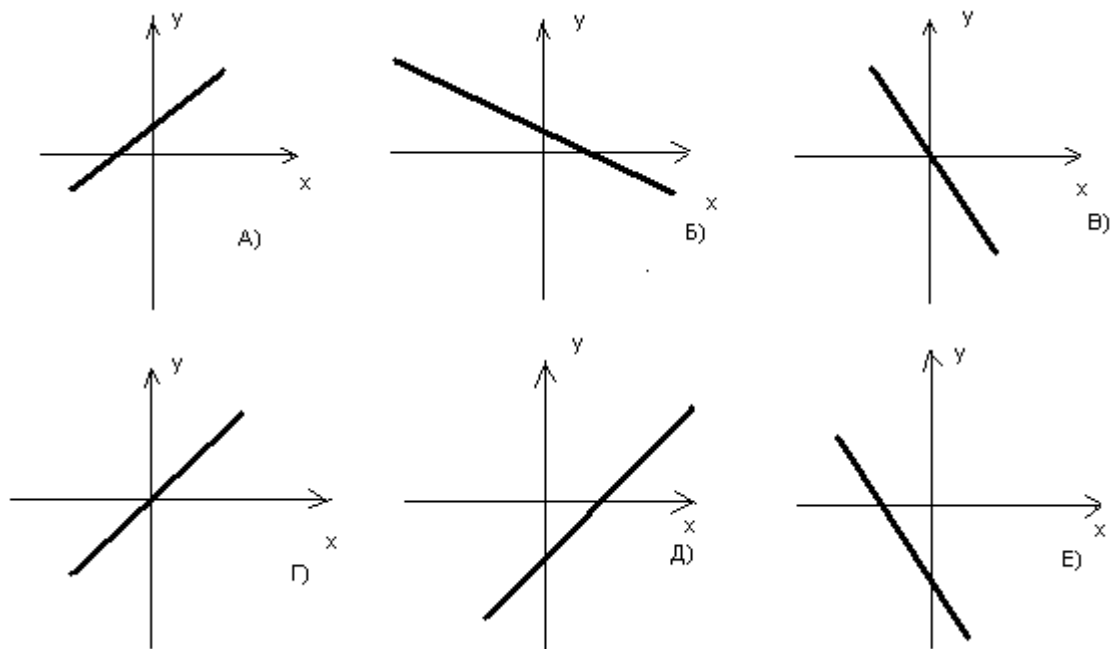


Рис. 1

1.40. На рисунке 2 представлены графики функций: 1) $y = -2x + 5$; 2) $y = -\frac{2}{3}x + 5$; 3) $y = -6x + 5$. Сопоставьте каждому уравнению его график.

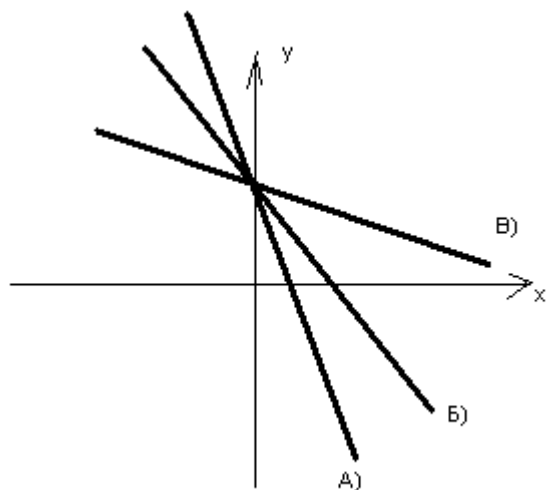


Рис. 2

- 1.41. На рисунке 3 представлены графики функций 1) $y = -2x + 5$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -2x - 5$. Сопоставьте каждому уравнению его график.

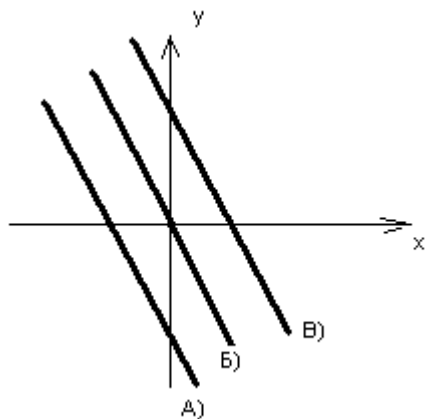


Рис. 3

- 1.42. Сопоставьте каждой прямой на рис. 4 уравнение, которым она может быть задана:

- 1) $y = -8$; 2) $y = 2x$; 3) $y = -7x + 3$; 4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = 0,5$; 6) $y = 100x + \frac{2}{11}$; 7) $y = -3,6x - 2$; 8) $y = -9x$.

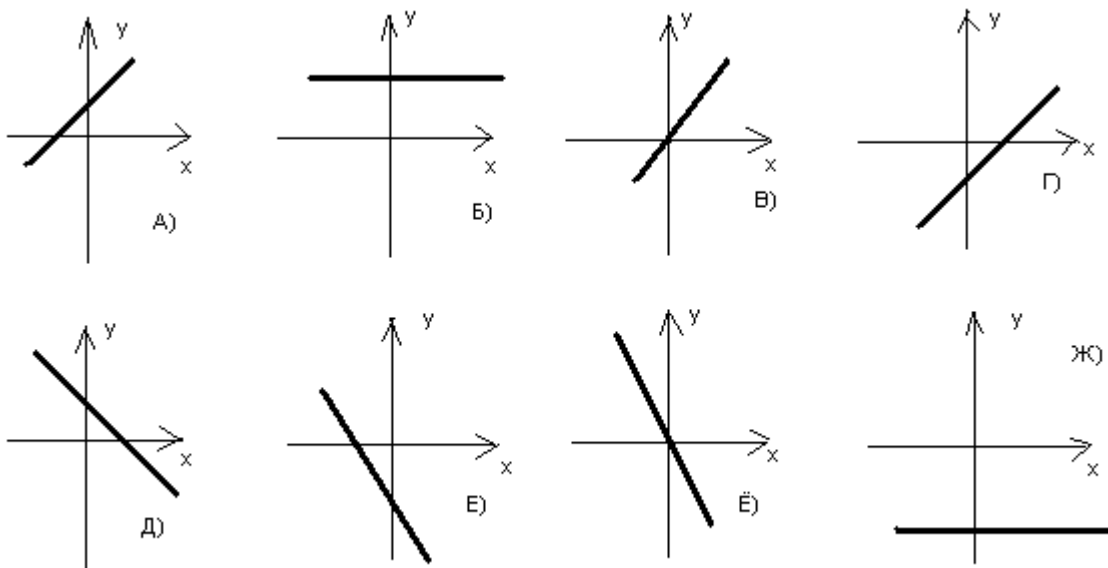


Рис. 4

1.43. Сопоставьте каждой паре прямых на рис. 5 соответствующую ей пару уравнений:

1) $y = 9$, $y = 3x + 1$; 2) $y = 3x - 2$, $y = 1,2x + 1$;

3) $y = x + 3$, $y = x - 3$; 4) $y = 0,6x + 2$, $y = 3x - 2$.

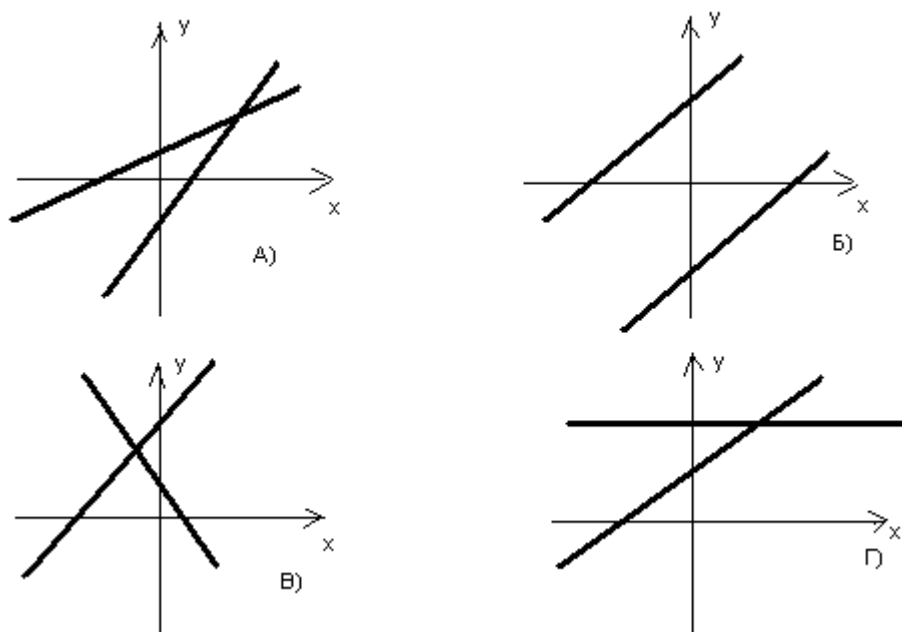


Рис. 5

1.44. Не выполняя построения, определите, в каких четвертях лежит график функции

А) $y = 9x - 6$; Б) $y = -8$; В) $y = -5x$; Г) $y = -2x + 7$; Д) $y = -x - 13$; Е) $y = 1$;

Ё) $y = 6x + 1$; Ж) $y = 5x$.

1.45. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = -4x + 11$ и проходит через точку $A(-3; 5)$.

1.46. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = 6 + 2x$ и проходит через точку $A(7; -12)$.

1.47. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = -4x + 3$ и пересекает график функции $y = 10x - 17$ в точке, принадлежащей оси ординат.

1.48. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = -2x + 5$ и пересекает график функции $y = 3x + 6$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

1.49. Не выполняя построений, найдите координаты точки пересечения графиков функций:

А) $y = 7 - 13x$ и $y = 12x - 43$; Б) $y = -x - 9$ и $y = 3x + 19$; В) $y = 4 - 5x$ и $y = -3x + 3$;

Г) $y = \frac{1}{3}x + 4$ и $y = x - 6$; Д) $y = \frac{5}{6}x - 3$ и $y = x + 5$; Е) $y = -7x - 8$ и $y = 13x + 2$;

Ё) $y = \frac{5}{7}x - 1$ и $y = -\frac{1}{7}x + 2$.

1.50. Постройте график функции:

А) $y = -2x + 6$; Б) $y = 1 - 0,5x$; В) $y = -4x + 2$; Г) $y = 3x + 6$; Д) $y = 0,2x - 1$;

Е) $y = 3 - \frac{1}{3}x$; Ё) $y = -5x + 2$; Ж) $y = \frac{2}{3}x + 6$; З) $y = x + \frac{x+1}{x+1}$; И) $y = 2x - \frac{x-1}{x-1}$;
 Й) $y = \frac{2}{3}x - \frac{3x-6}{x-2}$; К) $y = \frac{3}{5}x - \frac{x}{x}$; Л) $y = 6 - \frac{x(x-3)}{x-3}$.

1.51. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось x в точке (18; 0), а ось y – в точке (0; 9). Запишите уравнение этой прямой.

1.52. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось x в точке (12; 0), а ось y – в точке (0; – 6). Запишите уравнение этой прямой.

1.53. Функция $y = f(x)$ задана кусочно:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 18, & x \geq 6 \\ 4x - 8, & x < 6 \end{cases}. \text{ Найдите:}$$

А) $f(10); f(8); f(6); f(4); f(-1); f(-2)$;

Б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 3; – 12; 21; 32?

В) Принадлежат ли графику этой функции точки А(20; 72); В(- 7; -36); С(15; -27);

Д(- 15; - 52)?

Г) Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

1.54. Функция $y = f(x)$ задана кусочно:

$$f(x) = \begin{cases} x - 9, & x > 3 \\ -x + 2, & x \leq 3 \end{cases}. \text{ Найдите:}$$

А) $f(7); f(4); f(3); f(1); f(-8); f(-10)$;

Б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 1; 17; -19; - 34?

В) Принадлежат ли графику этой функции точки А(25; 16); В(- 13; -22); С(15; -13);

Д(- 18; - 20)?

Г) Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

1.55. Функция $y = f(x)$ задана кусочно:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 3 \\ -2x, & -2 < x < 3 \\ x^2, & x \leq -2 \end{cases}. \text{ Найдите:}$$

А) $f(9); f(5); f(3); f(1); f(-1); f(-2); f(-5); f(-16)$;

Б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 16; 4; 1; - 4; -0,5?

В) Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

1.56. Функция $y = f(x)$ задана кусочно. Постройте ее график. Используя график, выясните, сколько точек пересечения может иметь график этой функции с прямой $y = a$.

А) $f(x) = \begin{cases} -x - 3, & x \geq 1 \\ 1 - 5x, & x < 1 \end{cases}$; Б) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 3 \\ x + 3, & x \leq 3 \end{cases}$; В) $f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1, & x > 4 \\ -\frac{3}{4}x + 6, & x \leq 4 \end{cases}$;

Г) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - 1, & x \geq 3 \\ x - 2, & x < 3 \end{cases}$; Д) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 1, & x \geq 3 \\ -x + 3, & x < 3 \end{cases}$; Е) $f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \geq 2 \\ 4, & x \leq 2 \end{cases}$;

$$\begin{aligned} \text{Е)} f(x) &= \begin{cases} 6-x, x \geq 4 \\ -3, x < 4 \end{cases}; \text{Ж)} f(x) = \begin{cases} 2-3x, x \geq 1 \\ -x, 0 \leq x < 1 \\ -4x-1, x \leq 0 \end{cases}; \text{З)} f(x) = \begin{cases} 0,5x+3, x \leq 2 \\ 4, -1 < x < 2 \\ -x+2, x \leq -1 \end{cases}; \\ \text{И)} f(x) &= \begin{cases} 2x-1, x > 3 \\ x-4, -2 < x \leq 3 \\ -x-4, x \leq -2 \end{cases}; \text{Й)} f(x) = \begin{cases} -2-2x, x \geq 1 \\ 5x-1, -1 < x < 1 \\ 3-2x, x \leq -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.57. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{А)} \begin{cases} 3x-11y = -2 \\ 2x+5y = 11 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} -7x+3y = 17 \\ 6x-5y = 7 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} 5x+3y = 19 \\ 3x+5y = 21 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} x+y = -3 \\ x-y = 2 \end{cases}; \text{Д)} \begin{cases} x-y = 9 \\ x+y = -4 \end{cases}; \\ \text{Е)} \begin{cases} 3x-8y = 7 \\ 3x+8y = -1 \end{cases}; \text{Ё)} \begin{cases} 7x+2y = 5 \\ 7x-2y = 4 \end{cases}; \text{Ж)} \begin{cases} x-11y = 8 \\ x+11y = 7 \end{cases}; \text{З)} \begin{cases} x+7y = 9 \\ x-7y = 8 \end{cases}; \text{И)} \begin{cases} 6x-y = -9 \\ 6x+y = -1 \end{cases}; \\ \text{Й)} \begin{cases} 5x+y = 3 \\ 5x-y = -8 \end{cases}; \text{К)} \begin{cases} 3|x|+5|y| = 8 \\ 4|x|-11|y| = -7 \end{cases}; \text{Л)} \begin{cases} 2|x|+7|y| = 9 \\ 7|x|-9|y| = -2 \end{cases}; \text{М)} \begin{cases} 3|x|+5|y| = 13 \\ 5|x|-2|y| = 1 \end{cases}; \\ \text{Н)} \begin{cases} 5|x|-7|y| = 8 \\ 2|x|-3|y| = 3 \end{cases}; \text{О)} \begin{cases} 4x^2-y^2 = 1 \\ 2x+y = -1 \end{cases}; \text{П)} \begin{cases} 9x^2-y^2 = 2 \\ 3x+y = -2 \end{cases}; \text{Р)} \begin{cases} x^2-16y^2 = 9 \\ x+4y = -3 \end{cases}; \text{С)} \begin{cases} x^2-25y^2 = 6 \\ x^2+5y = -2 \end{cases}; \\ \text{Т)} \begin{cases} x^2-2xy+y^2 = 4 \\ 2x+3y = 1 \end{cases}; \text{У)} \begin{cases} x^2+2xy+y^2 = 1 \\ 3x-4y = 2 \end{cases}; \text{Ф)} \begin{cases} 36x^2-12xy+y^2 = 25 \\ x^2+4xy+4y^2 = 1 \end{cases}; \\ \text{Х)} \begin{cases} x^2-14xy+49y^2 = 4 \\ 81x^2+18xy+y^2 = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.58. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{А)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{7}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 11 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} \frac{8}{x} - \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} \frac{11}{x} + \frac{6}{y} = 28 \\ \frac{7}{x} - \frac{15}{y} = -1 \end{cases}; \\ \text{Д)} \begin{cases} \frac{3}{x-y} + \frac{5}{x+y} = 11 \\ \frac{1}{x-y} - \frac{3}{x+y} = -1 \end{cases}; \text{Е)} \begin{cases} \frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13 \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.59. Решите систему уравнений:

$$\text{А)} \begin{cases} x^2+2xy+y^2 = 0 \\ 3x-5y = 5 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} x^2-2xy+y^2 = 0 \\ 10x+3y = 4 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} x^2-4y^2 = 10 \\ x^2-4xy+4y^2 = 6 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} 9x^2-y^2 = 8 \\ 9x^2-6xy+y^2 = 4 \end{cases}.$$

1.60. Решите систему уравнений:

$$\text{А)} \begin{cases} x^2-xy = 0 \\ 2x+11y = 8 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} x^2-xy = 0 \\ 5x+2y = 1 \end{cases}.$$

1.61. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{А)} (2x+y-4)^2 + (x+y-3)^2 &= 0; \text{Б)} (x-3y+1)^2 + (6x+y-13)^2 = 0; \\ \text{В)} |2x+y| + (x-y-4)^2 &= 0; \text{Г)} (5x-y)^2 + |x+y+6| = 0; \text{Д)} } x^2+4y^2-2x+4y+2 = 0; \\ \text{Е)} } 25x^2+49y^2+20x-14y+5 &= 0. \end{aligned}$$

1.62. Решите систему уравнений:

$$A) \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 0 \\ 3xy + x + 2y = 5 \end{cases}; B) \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 0 \\ x - 2xy + 4y = -2 \end{cases}.$$

1.63. Вычислите:

$$A) \frac{32^7}{16^4 \cdot 64^4}; B) \frac{27^6 \cdot 81^5}{3^{40}}; B) \frac{25^{26}}{125^{11} \cdot 5^{20}}; \Gamma) \frac{343^{14} \cdot 49^{20}}{7^{65}}; Д) \frac{100^8}{2^{15} \cdot 5^{14}}; E) \frac{2^{14} \cdot 3^{11}}{72^6};$$
$$E) \frac{24^3}{18^4}; Ж) \frac{45^6}{75^3}.$$

1.64. Вычислите:

$$A) \frac{21^{13}}{7^{15} \cdot 3^{12}}; B) \frac{5^{32} \cdot 7^{30}}{35^{31}}; B) \frac{14^{14}}{7^{11} \cdot 2^{15}}; \Gamma) \frac{33^{14}}{11^{15} \cdot 3^{11}}; Д) \frac{25^7 \cdot 3^{16}}{15^{15}}; E) \frac{65^{41}}{169^{21} \cdot 5^{40}};$$
$$E) \frac{225^8}{27^6 \cdot 625^3}; Ж) \frac{49^{11} \cdot 32^4}{196^{12}}.$$

1.65. Вычислите рациональным способом:

$$A) 78^2 - 77^2; B) 65^2 - 64^2; B) 123^2 - 124^2; \Gamma) 453^2 - 452^2; Д) 87^2 - 89^2; E) 96^2 - 98^2;$$
$$E) \frac{73^2 - 54^2}{19}; Ж) \frac{65^2 - 91^2}{26}; 3) \frac{45^2 - 73^2}{56}; И) \frac{18^2 - 54^2}{72}; Й) \frac{32^2 - 71^2}{78}; К) \frac{57^2 - 33^2}{43^2 - 67^2};$$
$$Л) \frac{83^2 - 19^2}{39^2 - 25^2}.$$

1.66. Вычислите рациональным способом:

$$A) \frac{32^3 + 17^3}{49} - 32 \cdot 17; B) \frac{73^3 - 37^3}{36} + 73 \cdot 37; B) \frac{-5,13^2 - 0,76^2 + 4,37^2}{15,2 \cdot 1,026};$$
$$\Gamma) \frac{-4,21^2 + 2,84^2 + 1,37^2}{27,4 \cdot 0,568}; Д) \frac{4 \cdot (0,8^2 - 0,8 \cdot 1,7 + 1,7^2)}{1,6^3 + 3,4^3}; E) \frac{27 \cdot (1,7^3 - 1,5^3)}{5,1^2 + 5,1 \cdot 4,5 + 4,5^2};$$
$$Ж) \frac{25,3^3 - 13,7^3}{11,6} + 13,7 \cdot 25,3; 3) \frac{82,6^3 + 31,6^3}{114,2} - 82,6 \cdot 31,6.$$

1.67. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

$$A) (2x-3)^2 - (x+2)(3x-1) - (4x+3)(3-4x); B) (3-4x)(2x+1) - (2x+5)(5-2x) - (2-7x)^2;$$
$$B) (5-6x)(2x-1) - (4x+3)^2 - (5x+1)(1-5x); \Gamma) (6x+5)(5-6x) - (x-6)^2 - (x+7)(2x-7);$$
$$Д) (5x+3)(3x-5) - (x+2)(2x+3) - (3x-5)^2; E) (4x-1)(x-3) - (4-5x)^2 - (6x+5)(5x-6);$$
$$E) (7-2x)(x+2) - (6-x)(x+6) - (-2x-3)^2; Ж) (-4x+1)(1+4x) - (3x-2)(2x+3) - (-3x-5)^2.$$

1.68. Найдите наименьшее значение выражения. При каких значениях переменной оно достигается?

$$A) x^2 + 8x + 4; B) x^2 - 6x - 11; B) x^2 - 12x - 1; \Gamma) x^2 + 20x + 13;$$
$$Д) 9x^2 + 7x - 8; E) 4x^2 - 9x - 3; E) 2x^2 + x + 7; Ж) 4x^2 + 3x - 5.$$

1.69. Найдите наибольшее значение выражения. При каких значениях переменной оно достигается?

А) $-x^2 - 8x + 11$; Б) $-x^2 + 12x - 5$; В) $-9x^2 + 4x + 2$; Г) $-4x^2 - 7x - 1$

1.70. Разложите на множители:

А) $4x^2 - 25$; Б) $64y^{10} - 9$; В) $x^4 - x^6$; Г) $3x^2 - 12$; Д) $-5x^3 + 20x$; Е) $x^4 - 1$;
Ё) $2x^5 - 162x$; Ж) $20x^3y - 5xy^3$; З) $2xy - 6x^2$; И) $x^2 - 4x + 4$; Й) $9y^2 - 6y + 1$;
К) $25a^6 + 10a^3b + b^2$; Л) $4z^4 - 4z^8 - 1$; М) $3n^2 - 12n + 3$; Н) $-6t^3 + 36t^2 - 54t$.

1.71. Решите уравнение:

А) $x^3 - x = 0$; Б) $3x^3 - 75x = 0$; В) $x^3 - 2x^2 + 8x - 16 = 0$; Г) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = 0$;
Д) $x^3 + 7x^2 + 2x + 14 = 0$; Е) $x^3 + x^2 + 10x + 10 = 0$; Ё) $x^3 - 11x^2 - 4x + 44 = 0$;
Ж) $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$; З) $x^3 + 7x^2 - 9x - 63 = 0$.

1.72. Разложите на множители:

А) $3x + xy^2 - x^2y - 3y$; Б) $a^2b - 2b + ab^2 - 2a$;
В) $2a^2 - 2b^2 - a + b$; Г) $x - y - 3x^2 + 3y^2$; Д) $2x + y + y^2 - 4x^2$; Е) $a - 3b + 9b^2 - a^2$;
Ё) $a^3 - ab - a^2b + a^2$; Ж) $x^2y - x^2 - xy + x^3$; З) $1 - x^2 + 2xy - y^2$; И) $a^2 - 9b^2 + 18bc - 9c^2$;
Й) $2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$; К) $3a^2 + 12b^2 + 12ab - 12$; Л) $ac^4 - c^4 - ac^2 + c^2$;
М) $x^3y^2 - xy - x^3 + x$; Н) $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$; О) $a^2b - ab^2 - ac + ab + bc - c$.

1.73. Длина окружности переднего колеса кареты равна 3 м, а заднего 4,5 м. Какое расстояние проехала карета, если переднее колесо сделало на 20 оборотов больше заднего?

1.74. В коробке лежат несколько одинаковых пачек печенья. Если 7 пачек вынуть, то в коробке останется $\frac{1}{4}$ всего количества пачек, которое в ней может поместиться. Если же добавить $\frac{3}{4}$ от имеющегося в ней количества пачек, то одна пачка не поместится. Сколько пачек печенья лежит в коробке?

1.75. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен был изготавливать по 24 детали в день. Однако он ежедневно перевыполнял норму на 15 деталей и уже за 6 дней до срока изготовил 21 деталь сверх плана. Сколько деталей изготовил токарь?

1.76. Слесарь должен был изготовить определенное количество втулок при норме 19 втулок в день. Но применяя более совершенную технологию, он ежедневно изготавливал на 7 втулок больше, поэтому за 3 дня до срока изготовил 20 втулок сверх плана. Сколько втулок сделал слесарь?

1.77. В двух школах поселка было 1500 учащихся. Через год число учащихся первой школы увеличилось на 10%, а второй – на 20%, в результате чего общее число учащихся стало равным 1720. Сколько учащихся было в каждой школе первоначально?

1.78. В городской думе заседали 60 депутатов, представляющих две партии. После выборов число депутатов от первой партии увеличилось на 12%, а от второй партии – уменьшилось на 20%. Сколько депутатов от каждой партии оказалось в думе после выборов, если всего было выбрано 56 депутатов?

1.79. На пост губернатора области претендовало четыре кандидата: Гришкин, Тришкин, Мартышкин и Жиришкин. Во время выборов за Тришкина было отдано в 3 раза меньше голосов, чем за Гришкина, за Мартышкина – 9 раз больше, чем за Тришкина и Гришкина вместе, а за Жиришкина не проголосовал никто. Сколько процентов избирателей проголосовало за победителя?

- 1.80. Сколько воды нужно добавить к 6 л 98%-ого (по объему) раствору спирта, чтобы получить 40%-ый раствор?
- 1.81. Смешали 5 кг 15%-ого (по массе) раствора соли и некоторое количество 40%-ого раствора этой же соли и получили 30%-ый раствор. Какова масса нового раствора?
- 1.82. Сплав золота и серебра массой 4 кг содержит 30% золота. К нему добавили другой сплав золота и серебра, содержащий 55% золота и получили сплав, содержащий 40% золота. Какова масса нового сплава?
- 1.83. Путь от A до B пешеход проходит за 2 ч. Если он увеличит скорость на 2 км/ч, то уже за 1 час 48 минут он пройдет на 3 км больше, чем расстояние от A до B . Найдите расстояние от A до B .
- 1.84. Велосипедист должен был проехать весь путь с определённой скоростью за 2 ч. Но он увеличил скорость на 3 км/ч, и поэтому затратил на весь путь 1 час 40 минут. Найдите длину пути.
- 1.85. От села до города легковая машина доехала за 2 часа, а грузовая – за 5 часов. Найдите скорость движения каждой машины, если скорость грузовика на 48 км/ч меньше скорости легковой машины.
- 1.86. Длина прямоугольника втрое больше ширины. На сколько процентов уменьшится его площадь и его периметр, если его длину уменьшить на 30%, а ширину уменьшить на 40%?
- 1.87. Как и в какую сторону изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 12%, а ширину уменьшить на 35%?
- 1.88. Токарь может выполнить заказ за 6 ч. Какую часть заказа он выполнит за 1 ч?
- 1.89. Вася отвечает за час на 8 вопросов теста, а Аня – на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Вася закончил позже Ани на 10 минут. Сколько вопросов содержит тест?
- 1.90. Карлсон съедает банку варенья за 10 минут, фрекен Бок – за 12 минут, а Малыш – за 15 минут. За сколько минут они съедят банку варенья втроем?
- 1.91. Водоем наполняется двумя трубами за 5 часов, а через одну первую трубу – за 6 часов. Через сколько времени будет наполнен водоем, если открыть только одну вторую трубу?
- 1.92. Три экскаватора различной мощности могут отрыть котлован, работая отдельно: первый – за 10 дней, второй – за 12 дней, а третий – за 15 дней. За сколько времени они отроют котлован, работая совместно?
- 1.93. Первый кран наполняет бассейн за 12 минут, второй – за 6 минут, а третий – за 4 минуты. За какое время наполнят бассейн все три крана, открытые одновременно?
- 1.94. Первый насос наполняет пустой бак за 6 ч, а второй – за 10 ч. Третий насос опорожняет полный бак за 15 ч. За какое время наполнится пустой бак при одновременной работе трех насосов?

1.95. Рабочий может выполнить заказ за 4 часа, а его ученик – за 8 часов. Рабочий, проработав над выполнением заказа 3 часа, ушел, и работу завершал ученик. За какое время был выполнен заказ?

1.96. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 2 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

1.97. Две снегоуборочные машины, работая вместе, могут убрать снег за 6 часов. После 3 часов совместной работы первую машину отправили на другой объект, а оставшаяся машина закончила уборку за 5 часов. За сколько часов каждая машина, работая отдельно, может выполнить всю работу?

1.98. Двум машинисткам поручено перепечатать рукопись. Одна машинистка может выполнить всю работу за 10 ч, а вторая – за 15 ч. После 4 часов совместной работы, первая машинистка ушла и работу закончила одна вторая машинистка. За сколько времени был выполнен весь заказ?

1.99. В бассейн проведены две трубы – большая и маленькая. Обе трубы вместе могут наполнить бассейн за 5 ч, а одна большая – за 6 ч. За сколько времени наполнится $\frac{2}{3}$ бассейна через одну маленькую трубу?

1.100. Миша проезжает путь от дома до дачи за 30 мин, а его сестра – за 45 мин. Однажды по дороге на дачу Миша встретил сестру. Выяснилось, что сестра едет с дачи и что она выехала на 10 мин позже Миши. Через сколько времени после выезда сестры они встретились? Сколько времени после встречи с сестрой пришлось Мише еще ехать до дачи?

1.101. Из пункта А в пункт В выехал грузовой автомобиль, а из пункта В в пункт А пятью часами позже выехал легковой автомобиль. Грузовой автомобиль проезжает путь от А до В за 15 ч, а легковой – за 10 ч. Через сколько времени после выезда грузового автомобиля произошла встреча? Через сколько времени после встречи легковой автомобиль приехал в А?

1.102. За три дня турист прошел 128 км, причем за второй день он прошел $\frac{3}{7}$ расстояния, пройденного за первый день, а за третий – 40% того, что за первый. Сколько километров проходил турист ежедневно?

1.103. Первый слиток содержит 30% меди, а второй – 70% меди. Сколько килограммов от каждого слитка нужно взять, чтобы получить 120 кг сплава, содержащего 40% меди?

1.104. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если поменять местами его цифры, то получится число, которое больше данного на 18. Найдите это число.

1.105. За три дня автомобиль проехал 1680 км, причем во второй день он проехал $\frac{7}{9}$ пути, пройденного в первый день, а в третий – $\frac{3}{4}$ пути, пройденного за первые два дня вместе. Сколько километров проехал автомобиль за второй день?

1.106. В трех баках находится 260 л воды. Известно, что во втором баке на 20 л воды больше, чем в первом, а в третьем – $\frac{5}{8}$ количества воды, находящейся в первом и втором баках вместе. Сколько воды находится в каждом баке?

1.107. Можно ли 351 книгу разложить по трем полкам так, чтобы на одной полке было бы на 7 книг больше, чем на второй и вдвое больше книг, чем на третьей?

1.108. Имеется уксусный раствор массой 1,5 кг, содержащий 40% уксуса. Сколько воды нужно добавить в раствор, чтобы новый раствор содержал 10% уксуса?

1.109. (Из «Арифметики» Л. П. Киселева) Из двух сортов чая составлено 32 фунта смеси; фунт первого сорта стоит 3 р., фунт второго сорта – 2 р. 40 к. Сколько фунтов взято от того и другого сорта, если фунт смешанного чая стоит 2 р. 85 к.?

1.110. (Задача Д. Пойа) Торговец продает орехи двух сортов: одни по 90 центов, другие – по 60 центов за килограмм. Он хочет получить 50 кг смеси по 72 цента за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?

1.111. Имеется два куска сплава олова и свинца, содержащие 60% и 40% олова соответственно. По сколько граммов от каждого куска надо взять, чтобы получить 600 г сплава, содержащего 45% олова?

1.112. На должность губернатора претендовало три кандидата: Кошкин, Блошкин и Матрешкин. Во время выборов за Матрешкина было отдано вчетверо меньше голосов, чем за Блошкина, а за Кошкина – в 1,5 раза больше, чем за Блошкина и Матрешкина вместе. Сколько процентов голосов получил победитель?

1.113. Яблоки, содержащие 70% воды, при сушке потеряли 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные яблоки?

1.114. Груши, содержащие 65% воды, при сушке потеряли 50% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные груши?

1.115. Рядовой Иванов может почистить котел картошки за 4 ч, а рядовой Петров – за 6 ч. У рядового Иванова 10% картошки идет в очистки, а у рядового Петрова – 15%. Однажды им пришлось вместе чистить котел картошки. Сколько процентов картошки уйдет в очистки при их совместной работе?

1.116. Масса бороды Карабаса-Барабаса составляет 40% его общей массы. Буратино остриг ему часть бороды, после чего масса оставшейся бороды стала составлять 10% массы Карабаса-Барабаса. Какую часть бороды остриг Буратино?

1.117. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважины относятся как 6 : 7 : 10. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10%, и из второй – тоже на 10%. На сколько процентов надо увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой нефти не изменился?

1.118. Объемы ежегодной добычи газан на первом, втором и третьем месторождении относятся как 3 : 8 : 13. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 13%, и на втором – тоже на 13%. На сколько процентов надо увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объем добываемого за месяц газа не изменился?

1.119. Три насоса, работая вместе, выкачивают из бассейна воду за 2 ч 5 мин. Производительности насосов относятся как 1 : 4 : 7. Сколько процентов объема бассейна будет выкачено за 45 мин совместной работы первого и третьего насосов?

- 1.120. Пешеход может пройти расстояние между селами за 6 ч, а велосипедист может проехать это расстояние за 3 ч. Через сколько часов они встретятся, если отправятся одновременно из этих сел навстречу друг другу?
- 1.121. Первая бригада, работая отдельно, может выполнить задание за 3 дня, а вместе со второй бригадой – за 2 дня. За сколько дней одна вторая бригада может выполнить это задание?
- 1.122. У Анны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 ч разговора или 210 ч ожидания. Когда Анна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон полностью разрядился. Сколько времени она ехала в поезде, если известно, что Анна говорила по телефону ровно половину времени поездки?
- 1.123. Расстояние между двумя пунктами пароход проходит вниз по течению реки за 2 ч, а вверх по течению – за 3 ч. Сколько часов между теми же пунктами плывет плот?
- 1.124. Папа и сын плывут на лодке против течения. В какой-то момент сын уронил за борт папину шляпу. Только через 20 мин папа заметил пропажу, быстро развернул лодку, и они поплыли вниз по течению с той же собственной скоростью. За сколько минут они догонят шляпу?
- 1.125. Первое число равно 0,2, второе равно 0,3. Сколько процентов составляет первое число от суммы этих чисел? На сколько процентов первое число меньше второго и на сколько процентов второе число больше первого?
- 1.126. Первое число равно 0,4, второе равно 0,6. Сколько процентов составляет второе число от суммы этих чисел? На сколько процентов первое число меньше второго и на сколько процентов второе число больше первого?
- 1.127. При каких значениях a уравнение 1) не имеет решений; 2) имеет корень, равный 1:
 А) $(a - 5)x = 9$; Б) $(a + 3)x = 7$; В) $(2a - 3)(3x + 1) = -4$; Г) $(3a + 2)(4x - 3) = -3$?
- 1.128. Решите уравнение относительно x :
 А) $-6x = a$; Б) $ax = 7$; В) $px = -1$; Г) $(a - 2)x = 9$; Д) $(p - 4)x = 1$; Е) $px = p$;
 Ё) $5x = a + 4$; Ж) $ax = a(a + 3)$; И) $bx = b(b + 1)$; Й) $k(k - 6)x = 3$; К) $p(p - 17)x = 9$.
- 1.129. Решите уравнение относительно x :
 А) $ax + 6 = x - 11$; Б) $x - 9 = ax - 1$; В) $4x + a - 9 = a(x - 1)$; Г) $7x - a + 2 = a(x + 2)$;
 Д) $a(a + 4)x = a$; Е) $a(a - 5)x = a$.
- 1.130. Решите уравнение относительно x :
 А) $|x| = a$; Б) $|x| = -a$; В) $|x + 7| = a$; Г) $|x - 8| = a$; Д) $|-3x + 5| = a$; Е) $|-2x + 3| = a$;
 Ё) $|5x + 1| = -a$; Ж) $|4x + 9| = -a$; З) $|2x - a + 1| = a$; И) $|3x + 8 - a| = a$;
 Й) $|4x + a - 5| = a^2$; К) $|5x - 6 - a| = a^2$.
- 1.131. При каких значениях параметра a
 А) число 3 является корнем уравнения $-2x + 3a = ax$?
 Б) число -5 является корнем уравнения $ax + 6 = 3a - x$?
 В) число -4 является корнем уравнения $|3ax + 1| = 4$?

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ.

2.1 СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ, СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ,

2.1 Сократите дробь:

А) $\frac{5a+3b}{25a^2+30ab+9b^2}$; Б) $\frac{4x-5y}{16x^2-40xy+25y^2}$; В) $\frac{p^2+9q^2+6pq}{2p+6q}$; Г) $\frac{a^2+16b^2-8ab}{3a-12b}$;
Д) $\frac{(3a+2b)^2+(2a-3b)^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}$; Е) $\frac{(5x+3y)^2+(5y-3x)^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}$.

2.2 Сократите дробь:

А) $\frac{x^2-y^2}{ax-ay}$; Б) $\frac{ac+bc}{a^2-b^2}$; В) $\frac{a^3b-100ab^3}{0,5a+5b}$; Г) $\frac{m^3n-100mn^2}{0,7m-7n}$; Д) $\frac{(-m-n)(n^2+m^2)}{n^4-m^4}$;
Е) $\frac{(a-b)(b^2+a^2)}{b^4-a^4}$; Ё) $\frac{a^3+a^2d+ad^2+d^3}{a^4-d^4}$; Ж) $\frac{c^4-d^4}{c^3-c^2d+cd^2-d^2}$.

2.3 Выполните действия:

А) $\frac{3a+7}{a-1} + \frac{7a-5}{a-1}$; Б) $\frac{7x+3}{x-2} + \frac{5x-6}{x-2}$; В) $\frac{8x+7}{x-1} - \frac{7x+6}{x-1}$; Г) $\frac{9a+13}{a-2} - \frac{8a+11}{a-2}$;
Д) $\frac{3c+7}{c-1} - \frac{4c+8}{c-1}$; Е) $\frac{5a-9}{a-2} - \frac{6a-11}{a-2}$; Ё) $\frac{6y+7}{y-1} - \frac{4y+8}{y-1} - \frac{2y-1}{y-1}$;
Ж) $\frac{11a+9}{a-2} - \frac{6a+8}{a-2} - \frac{4a+1}{a-2}$.

2.4 Выполните действия:

А) $\frac{2x-3y}{y-2x} + \frac{y-3x}{2x-y}$; Б) $\frac{2b-3c}{b-5c} + \frac{c-3b}{5c-b}$; В) $\frac{x^4-8xz}{x^2-z^2} + \frac{z^4-8zx}{z^2-x^2}$; Г) $\frac{b^4-3bc}{b^2-c^2} + \frac{c^4-3bc}{c^2-b^2}$;
Д) $\frac{a}{(a-2c)^2} - \frac{2c}{(2c-a)^2}$; Е) $\frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{(b-a)^2}$; Ж) $\frac{4x+3y-z}{6x+6y-5z} + \frac{4z-3y-2x}{5z-6x-6y}$;
З) $\frac{2b-3c+d}{5b-5c+3d} + \frac{2c-3b-2d}{5c-5d-3c}$.

2.5 Постройте график функции:

А) $y = \frac{3x^2-x}{x} - \frac{x^2+2x}{x}$; Б) $y = \frac{5x^2-2x}{x} - \frac{3x^2-x}{x}$;
В) $y = \frac{3x^2-x}{x-1} - \frac{x^2-3x}{1-x}$; Г) $y = \frac{5x^2-9x}{x-2} - \frac{x^2-3x}{2-x}$.

2.6 Выполните действия:

А) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2}$; Б) $\frac{3}{3-y} - \frac{y}{y^2-9}$; В) $\frac{x}{x^2+4x+4} - \frac{2}{x+2}$; Г) $\frac{3}{3+y} - \frac{y}{9+6y+y^2}$;

$$\text{Д)} \frac{x}{(x-2)^2} - \frac{2}{2-x}; \text{Е)} \frac{3}{3-a} - \frac{a}{(a-3)^2}; \text{Ё)} \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9}; \text{Ж)} \frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1};$$

$$3) \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{1}{9-x^2}; \text{И)} \frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{1-x^2}.$$

2.7 Представьте в виде дроби:

$$\text{А)} 2 + \frac{b}{2a+7b}; \text{Б)} 3 + \frac{y}{3x+5y}; \text{В)} 2 - \frac{3b}{2a+7b}; \text{Г)} 3 - \frac{2y}{3x+5y}; \text{Д)} \frac{b}{2a+7b} - 2;$$

$$\text{Е)} \frac{y}{3x-5y} - 3; \text{Ж)} \frac{b}{2a+7b} - \frac{1}{7}; 3) \frac{y}{3x+5y} - \frac{1}{5}; \text{И)} \frac{a-1}{16-a^2} - 3 - \frac{5}{a+4};$$

$$\text{К)} \frac{a+1}{25-a^2} - \frac{4}{a+5} + 2; \text{Л)} \frac{2}{x+3} + \frac{7}{x-3} + \frac{2x-1}{9-x^2}; \text{М)} \frac{4}{x^2-25} - \frac{2}{x+5} - \frac{x+2}{5-x}.$$

2.8 Выполните действия:

$$\text{А)} \frac{8}{x^2} - \frac{3}{x} + 2; \text{Б)} \frac{4}{y^3} + \frac{5}{y} - 7; \text{В)} \frac{6}{a^4} - \frac{4}{a^2} + 3; \text{Г)} 5 - \frac{4m+5n}{n}; \text{Д)} 6 - \frac{3a+6c}{c};$$

$$\text{Е)} 7 - \frac{5x+7y}{y}; \text{Ё)} \frac{4c+3}{c-1} - 3; \text{Ж)} \frac{5b+1}{b+2} - 4; 3) \frac{3m+2}{m-3} - 2; \text{И)} \frac{a^2+b^2}{2a-b} + 2a+b;$$

$$\text{Й)} \frac{m^2-n^2}{m+3n} + m - 3n; \text{К)} \frac{x^2-y^2}{4x+y} + 4x - y; \text{Л)} m - \frac{25}{m-5} - 5; \text{М)} x - \frac{9}{x-3} - 3; \text{Н)} a - \frac{16}{a^2-4} - 4.$$

2.9 Выполните действия:

$$\text{А)} \frac{x-3}{3x+6} - \frac{x-6}{x+2}; \text{Б)} \frac{a+4}{2a-6} - \frac{a+1}{a-3}; \text{В)} \frac{x-5}{4x+4} - \frac{x-2}{x+1}; \text{Г)} \frac{m+4}{5m-10} + \frac{3-m}{4m-8};$$

$$\text{Д)} \frac{x+3}{3x-3} + \frac{2-x}{5x-5}; \text{Е)} \frac{b+2}{2b-8} + \frac{4-b}{3b-12}; \text{Ё)} \frac{y+6}{y-6} - \frac{y+2}{y+6}; \text{Ж)} \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-1}{x+5};$$

$$3) \frac{c+4}{c-4} - \frac{c-3}{c+4}; \text{И)} \frac{3x}{4x-4} + \frac{5x}{7-7x}; \text{Й)} \frac{4b}{3b-21} + \frac{3b}{14-2b}; \text{К)} \frac{7m}{5m-30} + \frac{2m}{18-3m};$$

$$\text{Л)} \frac{2b}{2b+c} - \frac{4b^2}{4b^2+4bc+c^2}; \text{М)} \frac{3p}{3p+2q} - \frac{9p^2}{9p^2+12pq+4q^2}; \text{Н)} \frac{4a}{4a+b} - \frac{16a^2}{16a^2+8ab+b^2};$$

$$\text{О)} \frac{2}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+3a}; \text{П)} \frac{4}{c^2-36} - \frac{2}{c^2-6c}; \text{Р)} \frac{8}{b^2-25} - \frac{4}{b^2+5b}.$$

2.10 Упростите выражение:

$$\text{А)} \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b-a}; \text{Б)} \frac{2y^2-5xy}{x^2-4y^2} - \frac{x}{2y-x} - \frac{y}{x+2y}; \text{В)} \frac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2} - \frac{3y}{2x+3y} + \frac{3y}{3y-2x};$$

$$\text{Г)} \frac{x+7}{3x+12} - \frac{2}{x} + \frac{7x+40}{3x^2+12x}; \text{Д)} \frac{x-1}{2x-6} - \frac{1}{x} - \frac{3x-3}{2x^2-6x}; \text{Е)} \frac{a+6}{5a-10} - \frac{3}{a} - \frac{26-5a}{5a^2-10a};$$

$$\text{Ё)} \frac{a-1}{3a^2+6a+3} - \frac{1}{2a+2}; \text{Ж)} \frac{m+2}{4m^2-16m+16} - \frac{1}{3m-6}; 3) \frac{c+1}{2c^2-24c+72} - \frac{1}{7c-42};$$

$$\text{И)} \frac{y+6}{4y+8} - \frac{y+2}{4y-8} + \frac{5}{y^2-4}; \text{Й)} \frac{y+12}{8y+32} - \frac{y+4}{8y-32} + \frac{9}{y^2-16}; \text{К)} \frac{y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{3}{y^2-1};$$

$$\text{Л)} \frac{a+3}{a^2+3a+9} - \frac{1}{a-3} + \frac{a^3+3a-9}{a^3-27}; \text{М)} \frac{x+2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2} + \frac{x^3+2x}{x^3-8};$$

$$\text{Н)} \frac{y+1}{y^2+y+1} - \frac{1}{y-1} + \frac{y^3+y+1}{y^3-1}.$$

2.2 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

2.11 Упростите выражение:

А) $\frac{4mn - m^2}{7} \cdot \frac{14c}{m^4}$; Б) $\frac{2xy - y^2}{3} \cdot \frac{9x}{y^5}$; В) $\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{32a}{b^3}$;
Г) $\frac{3xy - y^2}{xy + 2y^2} \cdot \frac{3x^3 - x^2y}{x^2y + 2xy^2}$; Д) $\frac{a^2 - 2ab}{a^2 + 3ab} \cdot \frac{a^3 - 2a^2b}{a^2b + 3ab^2}$; Е) $\frac{m^2 - mn}{m^2 + mn} \cdot \frac{m^3 - m^2n}{m^3 - mn^2}$;
Ё) $\frac{x^2 - 49}{x^2 + 9x} \cdot \frac{x^2 - 81}{x^2 - 7x}$; Ж) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x} \cdot \frac{x^2 - 36}{x^2 + 5x}$; З) $\frac{x^2 - 16}{x^3 - 3x^2} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x}$;
И) $\frac{3b^2 + 6b + 3}{b^3 - 8} \cdot \frac{9b + 9}{2b^2 + 4b + 8}$; Й) $\frac{4a^2 - 24a + 36}{a^3 + 1} \cdot \frac{8a - 24}{7a^2 - 7a + 7}$; К) $\frac{5y^2 - 20y + 20}{y^3 - 1} \cdot \frac{10y - 20}{3y^2 + 3y + 3}$.

2.12 Выполните деление:

А) $\frac{x+1}{3x} : \frac{x^2 + 2x + 1}{9x^2}$; Б) $\frac{x^2 - 4x + 4}{20x^3} : \frac{x-2}{5x}$; В) $\frac{x-3}{6x^3} : \frac{x^2 - 6x + 9}{18x^4}$; Г) $\frac{x^2 - 2x}{3x+3} : \frac{5x-10}{x+1}$;
Д) $\frac{x-3}{4x+12} : \frac{2x-6}{x^2 + 3x}$; Е) $\frac{x^2 + 4x}{5x-5} : \frac{7x+28}{x-1}$; Ё) $(n-7) : \frac{n^2 - 14n + 49}{n^2 - 49}$;
Ж) $\frac{z^2 + 10z + 25}{z^2 - 25} : (z+5)$; З) $\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 - 4} : (m-2)$; И) $\frac{a^2 - 4b^2}{9a^2 - b^2} : \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{9a^2 - 6ab + b^2}$;
Й) $\frac{x^2 - 9y^2}{16x^2 - 9y^2} : \frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{16x^2 - 24xy + 9y^2}$; К) $\frac{a^2 - 81b^2}{49a^2 - 25b^2} : \frac{a^2 + 18ab + 81b^2}{49a^2 - 70ab + 25b^2}$.

2.13 Упростите выражение:

А) $\left(-\frac{2p^4q^2}{5m^8}\right)^3 : \left(-\frac{2p^5q^3}{5m^6}\right)^4$; Б) $\left(-\frac{3m^2n^3}{4b^4}\right) : \left(-\frac{3m^3n}{4b^6}\right)^4$; В) $\left(-\frac{9x^5y^2}{7z^4}\right) : \left(-\frac{9x^4y^{10}}{7z^3}\right)$.

2.14 А) Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что $x - \frac{1}{x} = 5$.

Б) Найдите значение выражения $4x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что $2x + \frac{1}{x} = 7$.

В) Найдите значение выражения $25x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что $5x + \frac{1}{x} = 4$.

2.15 А) Известно, что $x^2 + \frac{81}{x^2} = 118$. Найдите значение выражения $x - \frac{9}{x}$.

Б) Известно, что $x^2 + \frac{9}{x^2} = 10$. Найдите значение выражения $x + \frac{3}{x}$.

В) Известно, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$. Найдите значение выражения $x + \frac{1}{x}$.

2.3 ПРИМЕРЫ НА ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

2.16 Найдите значение выражения:

А) $(x+2) : \frac{x^2 + 4x + 4}{x-2}$ при $x = 6$; Б) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}$ при $a = 3,05$; $b = -1\frac{1}{20}$;

В) $\frac{a^2 - 36}{2a^2 + 12a}$ при $a = -0,3$

2.17 Найдите значение выражения:

А) $\frac{a}{5c} - \frac{a^2 + 25c^2}{5ac} + \frac{5c - a}{a}$ при $a = 89, c = 34$; Б) $\frac{a^2 + ax}{x} : \frac{a+x}{x^2}$ при $a = 17, x = 5$;

В) $\frac{7b}{a-b} \cdot \frac{a^2 - ab}{35b}$ при $a = 61, b = 2,8$; Г) $\frac{a^2 - 9b^2}{3ab} : \left(\frac{1}{3b} - \frac{1}{a}\right)$ при $a = 8\frac{4}{7}, b = 4\frac{1}{7}$

2.18 Упростите выражение:

А) $\left(x + \frac{3-x^2}{x+1}\right) : \frac{x+3}{1-x^2}$; Б) $\left(a + \frac{1-a^2}{1+a^2}\right) \cdot \frac{1+a^2}{a^2+2a+1}$; В) $\frac{-5x-6}{x^2-4} + \frac{x}{x^2-4} : \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2}$;

Г) $\frac{5m-21}{m^2-9} + \frac{m}{m^2-9} \cdot \frac{m+3}{m} + \frac{m-3}{m+3}$; Д) $\frac{1}{a-2} - \frac{4a}{a^2-4} \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-a}\right)$;

Е) $\left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1}$; Ё) $\left(a+1 + \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2}{a^2-2a+1}$;

Ж) $\left(x-2 + \frac{8}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2+4}$; З) $\left(\frac{10}{25-b^2} - \frac{1}{b+5} - \frac{1}{b-5}\right) \cdot (25-10b+b^2)$;

И) $(a^2+2a+1) \cdot \left(\frac{4}{a+1} + \frac{2}{a^2-1} + \frac{1}{1-a}\right)$; Й) $\left(\frac{5m}{m+3} - \frac{14m}{m^2+6m+9}\right) : \frac{5m+1}{m^2-9} + \frac{3(m-3)}{m+3}$;

К) $\left(\frac{3a}{a-4} + \frac{10a}{a^2-8a+16}\right) \cdot \frac{a^2-16}{3a-2} - \frac{4(a+4)}{a-4}$; Л) $\left(\frac{1}{2-4b} + \frac{b+1}{8b^3-1} \cdot \frac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right) : \frac{1}{4b-2}$;

М) $\left(\frac{1}{2-6a} + \frac{1}{27a^3-1} : \frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right) \cdot \frac{2+6a}{a}$; Н) $\frac{8-n^3}{2+n} : \left(2 + \frac{n^2}{2+n}\right) - \frac{n^2}{n-2} \cdot \frac{4-n^2}{n^2+2n}$;

М) $\frac{a^2}{3+a} \cdot \frac{9-a^2}{a^2-3a} + \frac{27+a^3}{3-a} : \left(3 + \frac{a^2}{3-a}\right)$

2.19 Найдите значение выражения при заданных значениях переменной:

А) $\left(\frac{4a}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}\right) \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{a}{a-1}$ при $a = -\frac{3}{17}$; Б) $\left(\frac{12b}{9-b^2} + \frac{3-b}{3+b}\right) : \frac{3+b}{3} - \frac{3}{3-b}$ при $b = \frac{3}{31}$;

В) $\left(\frac{2}{a^2-4a+4} - \frac{a}{4-a^2}\right) : \frac{4+a^2}{4-a^2} + \frac{2}{a-2}$ при $a = 2,5$;

Г) $\frac{2}{x-1} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{x}{1-x^2}\right)$ при $x = 1,5$;

Д) $\frac{3-2m}{m+5} + \frac{25-10m+m^2}{m} \cdot \left(\frac{m}{(m-5)^2} - \frac{m}{25-m^2}\right)$ при $m = -5,2$;

Е) $\left(\frac{2}{4-y^2} - \frac{2}{(y-2)^2}\right) : \frac{4}{4-4y+y^2} - \frac{2-y}{y+2}$ при $y = -2,5$;

Ё) $\left(\frac{8a}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot \frac{a}{a+2} - \frac{a}{a-2}$ при $a = -0,987$;

Ж) $\left(\frac{16y}{16-y^2} + \frac{4-y}{4+y}\right) : \frac{4+y}{4} - \frac{4}{4-y}$ при $y = -2,77$.

2.20 Из формулы $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$ выразите:

А) F ; Б) d .

2.21 Из формулы $S = \frac{abc}{4R}$ выразите:

А) c ; Б) R .

2.22 Из формулы $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ выразите:

А) a_1 ; Б) d .

2.23 Из формулы $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ выразите:

А) R ; Б) ε .

2.24 Из формулы $s = vt + \frac{at^2}{2}$ выразите:

А) v ; Б) a .

2.25 Из формулы $\frac{1}{m} - \frac{mn}{k} = p$ выразите:

А) k ; Б) n .

2.26 Из формулы $P = \frac{U^2}{R}$ выразите R .

2.27 Из формулы $Q = I^2 R t$ выразите R .

2.28 Выразите x через y :

А) $y = \frac{2}{x-1} - 1$; Б) $y = \frac{3}{2-x} - 1$.

2.29 Упростите выражение:

А) $\left(\frac{5x}{x-9} + \frac{42x}{x^2-18x+81} \right) \cdot \frac{x^2-81}{5x-3} - \frac{9(x+9)}{x-9}$; Б) $\left(\frac{5a}{a+1} - \frac{3a}{a^2+2a+1} \right) \cdot \frac{5a+2}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}$.

2.30 Упростите выражение:

А) $\frac{b+2}{b^2-2b+1} \cdot \frac{b^2-4}{3b-3} - \frac{3}{b-2}$; Б) $\frac{a+4}{a^2-6a+9} \cdot \frac{a^2-16}{2a-6} - \frac{2}{a-4}$; В) $\frac{c+6}{c^2-4c+4} \cdot \frac{c^2-36}{16c-32} - \frac{4}{c-6}$;

Г) $\left(\frac{1}{a^2-4a+4} + \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{a^2+4a+4} \right) \cdot \frac{2a}{a^4-8a^2+16}$;

Д) $\frac{8m^3}{(m^2-64)^2} \cdot \left(\frac{1}{m^2+16m+64} + \frac{2}{m^2-64} + \frac{1}{m^2-16m+64} \right)$;

$$\text{E)} \left(\frac{1}{x^2 - 14x + 49} + \frac{2}{x^2 - 49} + \frac{1}{x^2 + 14x + 49} \right) : \frac{16x^4}{(x^2 - 49)^2}.$$

2.31 Найдите значение выражения:

$$\text{A)} \left(\frac{1}{a+3} - \frac{27}{a^3+27} + \frac{9}{a^2-3a+9} \right) \cdot \left(a - \frac{6a-9}{a+3} \right) \text{ при } a = -\frac{11}{31};$$

$$\text{Б)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1} \right) \text{ при } x = 0,67;$$

$$\text{B)} \left(\frac{1}{a+2} - \frac{12}{a^3+8} + \frac{6}{a^2-2a+4} \right) \cdot \left(a - \frac{4a-4}{a+2} \right) \text{ при } a = 9,333.$$

2.32 Упростите выражение:

$$\text{A)} \frac{m - \frac{14m-49}{7}}{\frac{m}{7} - 1}; \text{ Б)} \frac{1 - \frac{6}{12x-36}}{\frac{x}{x} - x}; \text{ В)} \frac{a - \frac{4a-4}{2}}{\frac{a}{2} - 1}; \text{ Г)} \frac{\frac{b}{b} - \frac{b+1}{b-1}}{\frac{b-1}{b+1} - \frac{b}{b}}; \text{ Д)} \frac{\frac{y}{2-y} + \frac{2+y}{y}}{\frac{2-y}{y} + \frac{2-y}{y}};$$

$$\text{E)} \frac{\frac{n+9}{n} - \frac{n}{n-9}}{\frac{n}{n+9} - \frac{n-9}{n}}.$$

Глава 3. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

3.1 Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого равна: А) 5; Б) 10.

3.2 Решите уравнение:

А) $x^2 = 25$; Б) $x^2 = 121$; В) $x^2 = \frac{4}{9}$; Г) $x^2 = \frac{64}{169}$; Д) $9x^2 = 1$; Е) $225x^2 = 4$;

Ё) $x^2 = -25$; Ж) $x^2 = -196$.

3.3 Решите уравнение:

А) $x^2 = 8$; Б) $x^2 = 11$; В) $x^2 = 5$; Г) $x^2 = 0$; Д) $x^2 = -31$; Е) $3x^2 - 2 = 0$; Ё) $6x^2 - 7 = 0$;
Ж) $(x-5)^2 = 2$; З) $(x+7)^2 = 7$; И) $(3x-4)^2 = 3$; Й) $(7x+2)^2 = 5$.

3.4 При каких значениях p имеет единственный корень уравнение:

А) $x^2 = p - 2$; Б) $x^2 = 3p + 2$; В) $x^2 - p^2 + 11 = 0$; Г) $x^2 - 5 + p^2 = 0$?

3.5 Найдите значение выражения:

А) $0,1\sqrt{900} - \frac{1}{4}\sqrt{64}$; Б) $0,2\sqrt{400} - \frac{1}{3}\sqrt{81}$; В) $0,7\sqrt{100} - \frac{1}{3}\sqrt{36}$; Г) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{0,04} + \sqrt{3^2 + 22}$;

Д) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{0,09} + \sqrt{2^3 + 1}$; Е) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{0,25} + \sqrt{5^3 - 4}$; Ё) $4\sqrt{0,49} - \sqrt{8^2 + 15^2}$;

Ж) $5\sqrt{0,64} - \sqrt{5^2 + 12^2}$; З) $3\sqrt{0,81} - \sqrt{9^2 + 12^2}$; И) $\sqrt{2\frac{2}{49}} + \sqrt{2\frac{7}{9}} - 0,03\sqrt{40000}$;

Й) $\sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt{1\frac{11}{25}} + 0,7\sqrt{10000}$; К) $\sqrt{7\frac{1}{9}} + \sqrt{3\frac{1}{16}} - 0,04\sqrt{90000}$.

3.6 Вычислите:

А) $(\sqrt{11})^2 - \sqrt{1,44}$; Б) $\sqrt{1,21} - (\sqrt{7})^2$; В) $(\sqrt{6})^2 - \sqrt{1,69}$; Г) $(2\sqrt{13})^2 - (5\sqrt{8})^2$;

Д) $(4\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2$; Е) $(2\sqrt{7})^2 - (5\sqrt{2})^2$; Ё) $14 \cdot \left(-\frac{1}{7}\sqrt{15}\right)^2 - \frac{1}{8} \cdot (2\sqrt{6})^2$;

Ж) $32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot (7\sqrt{15})^2$; З) $18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot (4\sqrt{3})^2$; И) $\sqrt{529} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{84}\right)^2$;

Й) $\sqrt{784} - \left(\frac{1}{7}\sqrt{343}\right)^2$; К) $\sqrt{961} - \left(-\frac{1}{5}\sqrt{125}\right)^2$.

3.7 Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

А) $\sqrt{x} = 3$; Б) $\sqrt{x} = 5$; В) $\sqrt{x} = 0$; Г) $\sqrt{x} = -4$; Д) $\sqrt{x} = 4$; Е) $\sqrt{x} = 16$;

Ё) $3\sqrt{x} - 8 = 0$; Ж) $5 - 2\sqrt{x} = 0$; З) $2\sqrt{x} - 1 = 0$; И) $\sqrt{12x - 11} = 2$; Й) $\sqrt{1 - 9x} = 10$;

К) $\sqrt{2 + 7x} = 9$; Л) $\sqrt{-7 - 4x} = 4$.

3.8 Решите уравнение:

А) $\sqrt{3x - 7} = 4$; Б) $\sqrt{1 - 11x} = 9$; В) $\sqrt{5 - 8x} = 1$; Г) $\sqrt{3 - 13x} = 25$;

Д) $\sqrt{4x+13} = 6$; Е) $\sqrt{-8-3x} = 4$; Ж) $\sqrt{3-x} = \sqrt{2x-9}$; З) $\sqrt{5x+3} = \sqrt{x-13}$.

3.9 Решите уравнение:

А) $\sqrt{6x} - 3 = 0$; Б) $\sqrt{5x} - 6 = 0$; В) $\sqrt{10x} - 9 = 0$; Г) $\sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{x}}} = 3$; Д) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2$;
Е) $\sqrt{10 + \sqrt{4 + \sqrt{x}}} = 4$; Ё) $(x-1)\sqrt{x^2-4} = 0$; Ж) $(x+2)\sqrt{x^2-9} = 0$; З) $(x-4)\sqrt{x^2-25} = 0$.

3.10 Из формулы $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ выразите r . Все величины положительны.

3.11 Из формулы $P = \frac{U^2}{R}$ выразите U . Все величины положительны.

3.12 Из формулы $Q = I^2 R t$ выразите I . Все величины положительны.

3.13 Из формулы $S = \frac{gt^2}{2}$ выразите t . Все величины положительны.

3.14 Из формулы $S = \pi R^2$ выразите R . Все величины положительны.

3.15 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

А) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+4x+4}}$; Б) $\frac{x-7}{\sqrt{x^2-2x+1}}$; В) $\sqrt{x^2-6x+10}$; Г) $\sqrt{x^2+10x+27}$;
Д) $\sqrt{2y-1-y^2}$; Е) $\sqrt{-a^5}$?

3.2 ФУНКЦИЯ $Y = \sqrt{X}$

3.16 Сравните числа:

А) $\sqrt{117,9}$ и $\sqrt{117,099}$; Б) $\sqrt{5,11}$ и $\sqrt{5,0999}$; В) 9 и $\sqrt{82}$; Г) $\sqrt{35}$ и 6; Д) $-\sqrt{19}$ и $-\sqrt{21}$;
Е) $-\sqrt{123}$ и $-\sqrt{111}$; Ё) -7 и $-\sqrt{50}$; Ж) $-\sqrt{227}$ и -15 .

3.17 Между какими двумя последовательными натуральными числами находится число:

А) $\sqrt{119}$; Б) $\sqrt{333}$; В) $\sqrt{97}$; Г) $\sqrt{719}$; Д) $\sqrt{833}$; Е) $\sqrt{539}$?

3.18 Расположите в порядке возрастания числа:

А) 4; 3,8; $\sqrt{15}$; $\sqrt{19}$; 4,3;
Б) 5; $\sqrt{26}$; 4,7; $\sqrt{23}$; 5,1;
В) 7; $\sqrt{46}$; 6,8; $\sqrt{50}$; 7,2;
Г) $5\sqrt{2}$; $3-\sqrt{10}$; $-5\sqrt{3}$; $\sqrt{49,5}$; $(\sqrt{123}-5)^0$.

3.19 Укажите **все** целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

А) 7 и $\sqrt{102}$; Б) $\sqrt{137}$ и 9; В) $\sqrt{150}$ и 8; Г) $\sqrt{6}$ и $\sqrt{73}$; Д) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{93}$;
Е) $\sqrt{17}$ и $\sqrt{101}$; Ё) $-\sqrt{29}$ и $-4,2$; Ж) $-5,8$ и $-\sqrt{47}$; З) $-\sqrt{62}$ и $-6,3$;
И) $-\sqrt{37}$ и 1,2; Й) $-\sqrt{29}$ и 2,8; К) 3,4 и $-\sqrt{19}$.

3.20 Постройте график функции:

- А) $y = \sqrt{x+3}$; Б) $y = \sqrt{x+1}$; В) $y = \sqrt{x-4}$; Г) $y = \sqrt{x-3}$; Д) $y = \sqrt{x-2}$; Е) $y = \sqrt{x-5}$;
 Ё) $y = \sqrt{x+1}$; Ж) $y = \sqrt{x+4}$; З) $y = \sqrt{x-3}+1$; И) $y = \sqrt{x-6}+3$; Й) $y = \sqrt{x-1}-2$;
 К) $y = \sqrt{x-3}-1$; Л) $y = \sqrt{x+4}+2$; М) $y = \sqrt{x+1}+5$; Н) $y = \sqrt{x+3}-2$; О) $y = \sqrt{x+6}-3$.

3.21 Постройте график функции и выясните с помощью графика при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку:

А) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, x \geq 4 \\ -0,5x + 4, x < 4 \end{cases}$; Б) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, x > 9 \\ -\frac{2}{3}x + 9, x \leq 9 \end{cases}$.

3.3 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

3.22 Найдите значение выражения:

- А) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; Б) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$; В) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$; Г) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{90}$; Д) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{5,2}$; Е) $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{0,7}$;
 Ё) $\sqrt{5,7} \cdot \sqrt{1,9}$; Ж) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{4,5}$; З) $\sqrt{54} \cdot \sqrt{0,06}$; И) $\sqrt{1,92} \cdot \sqrt{3}$; Й) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{1,2}$; К) $\sqrt{16,9} \cdot \sqrt{0,4}$.

3.23 Найдите значение выражения:

- А) $\sqrt{77 \cdot 24 \cdot 33 \cdot 14}$; Б) $\sqrt{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 20 \cdot 27}$; В) $\sqrt{21 \cdot 65 \cdot 39 \cdot 35}$; Г) $\sqrt{10 \cdot 20 \cdot 48 \cdot 36 \cdot 75 \cdot 98}$.

3.24 Найдите значение выражения:

- А) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$; Б) $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$; В) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; Г) $\sqrt{\frac{145,5^2 - 96,5^2}{193,5^2 - 31,5^2}}$;
 Д) $\frac{\sqrt{10^{11} - 10^{10}}}{10^6}$; Е) $\frac{\sqrt{5^7 - 5^6}}{5^6}$; Ё) $\frac{\sqrt{15^{15} + 15^{14}}}{3^7 \cdot \sqrt{5^{16}}}$; Ж) $\frac{\sqrt{8^{11} + 8^{10}}}{3\sqrt{8^{12}}}$.

3.25 Вычислите:

- А) $\sqrt{21} \cdot \sqrt{3\frac{6}{7}}$; Б) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{6\frac{2}{3}}$; В) $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{48}}$; Г) Error! Objects cannot be created from editing field

codes.; Д) $\sqrt{7 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}$;

Е) $\sqrt{5 \cdot 3^3} \cdot \sqrt{5 \cdot 3}$; Ё) $\sqrt{77} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{14}$; Ж) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{27}$;

З) $\sqrt{21} \cdot \sqrt{65} \cdot \sqrt{39} \cdot \sqrt{35}$; И) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{75} \cdot \sqrt{98}$.

3.26 Упростите выражение:

- А) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0,5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; Б) $15\sqrt{\frac{3}{5}} - 0,5\sqrt{60} + 2\sqrt{3\frac{3}{4}}$; В) $4\sqrt{3\frac{1}{2}} - 0,5\sqrt{56} - 3\sqrt{1\frac{5}{9}}$;

Г) $3\sqrt{2\frac{1}{3}} - \sqrt{84} - 4\sqrt{5\frac{1}{4}}$; Д) $4\sqrt{6\frac{1}{2}} - 2\sqrt{104} + 3\sqrt{2\frac{8}{9}}$; Е) $3\sqrt{3\frac{2}{3}} - \sqrt{132} + 4\sqrt{2\frac{1}{16}}$;

Ё) $2\sqrt{8\frac{1}{2}} - \sqrt{136} - 5\sqrt{1\frac{9}{25}}$; Ж) $2\sqrt{9,5} - \sqrt{152} + 9\sqrt{4\frac{2}{9}}$; З) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}$;

И) $\sqrt{1.25} + \sqrt{80} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}$.

3.27 Упростите:

А) $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$; Б) $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$; В) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; Г) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$;
 Д) $(8-2\sqrt{15})(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$; Е) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(8+\sqrt{12})$.

3.28 Сравните числа:

А) $2\sqrt{5}-1$ и $6-\sqrt{5}$; Б) $\sqrt{7}-1$ и $9-3\sqrt{7}$; В) $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ и $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$;
 Г) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2$ и $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

3.29 Между какими двумя последовательными натуральными числами находится число:

А) $\frac{4}{3}\sqrt{63}$; Б) $\frac{3}{4}\sqrt{112}$; В) $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$; Г) $\frac{10+\sqrt{17}}{3}$.

3.30 Упростите выражение:

А) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$; Б) $\sqrt{(\sqrt{33}-5)^2}$; В) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; Г) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; Д) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$; Е) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$;
 Ё) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}$; Ж) $\sqrt{100-18\sqrt{19}}$; З) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; И) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$;
 Й) $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}$; К) $\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}}$; Л) $\sqrt{87-16\sqrt{23}} - \sqrt{39-8\sqrt{23}}$;
 М) $\sqrt{18-4\sqrt{14}} - \sqrt{63-14\sqrt{14}}$; Н) $\sqrt{24-6\sqrt{15}} - \sqrt{115-20\sqrt{15}}$.

3.31 Постройте график функции:

А) $y = \sqrt{x^2} - x + 1$; Б) $y = \sqrt{x^2} - 2x + 5$.

3.32 Найдите значение выражения:

А) $3x^2 - 2x - 1$ при $x = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$; Б) $2x^2 - 6x + 3$ при $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$;
 В) $a^2 - 6\sqrt{5}a - 1$ при $a = \sqrt{5} + 4$; Г) $c^2 - 4\sqrt{2}c + 2$ при $c = \sqrt{2} - 3$.

3.33 Сократите дробь:

А) $\frac{x^2-11}{x+\sqrt{11}}$; Б) $\frac{a-\sqrt{17}}{17-a^2}$; В) $\frac{t-\sqrt{5}}{5-t^2}$; Г) $\frac{\sqrt{b}-2}{b^2-4}$; Д) $\frac{\sqrt{y}+3}{y-9}$; Е) $\frac{m-121}{11-\sqrt{m}}$; Ё) $\frac{m+3\sqrt{m}}{m-9}$;
 Ж) $\frac{x-7\sqrt{x}}{49-x}$; И) $\frac{9-a}{a-3\sqrt{a}}$; Й) $\frac{33+\sqrt{33}}{\sqrt{33}}$; К) $\frac{21+\sqrt{21}}{\sqrt{21}}$; Л) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}-13}$; М) $\frac{y-10\sqrt{y}+25}{y-25}$;
 Н) $\frac{x+16\sqrt{x}+64}{64-x}$; О) $\frac{36-c}{c-12\sqrt{c}+36}$; П) $\frac{6-\sqrt{12}}{\sqrt{12}-2}$; Р) $\frac{5-\sqrt{10}}{\sqrt{10}-2}$; С) $\frac{\sqrt{21}-3}{7-\sqrt{21}}$.

3.34 Упростите выражение: А) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right)$; Б) $\frac{1-2\sqrt{b}}{2\sqrt{b}+1} + \frac{b+3\sqrt{b}}{4b-1} : \frac{3+\sqrt{b}}{4\sqrt{b}+2}$.

3.35 Упростите выражение: А) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{7}}}$; Б) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{27}+\sqrt{2}}}$.

3.36 Упростите выражение:

А) $(\sqrt{18}-\sqrt{98})^2 + (7\sqrt{3})^2$; Б) $(\sqrt{20}-\sqrt{180})^2 + (5\sqrt{2})^2$;

В) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{24}+18\sqrt{2}-12\sqrt{3}$;

Г) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{15}\right) \cdot \sqrt{12}-4\sqrt{6}-24\sqrt{5}$; Д) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{15})^2$;

Е) $(3\sqrt{2}-\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{14}-1)^2$; Ё) $(2-\sqrt{3})^2(7+4\sqrt{3})+3\sqrt{12\frac{1}{4}}$; Ж) $(\sqrt{5}-2)^2(9+4\sqrt{5})-2\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

3.37 Проверьте равенство:

А) $(2+\sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5}-11)^2} = 20$; Б) $(1+\sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7}-10)^2} = 18$;

В) $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{6}+1}{15+10\sqrt{2}}$; Г) $\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{15+6\sqrt{6}}$.

3.38 Упростите выражение:

А) $(3\sqrt{6}+5\sqrt{8}-4\sqrt{32}) \cdot \sqrt{2}-\sqrt{108}$; Б) $(2\sqrt{3}+6\sqrt{20}-7\sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}-\sqrt{60}$;

В) $(4\sqrt{7}+7\sqrt{12}-2\sqrt{192}) \cdot \sqrt{3}-\sqrt{84}$; Г) $(\sqrt{5}+7\sqrt{2})(7\sqrt{2}-\sqrt{5})-(\sqrt{10}-2\sqrt{5})^2$;

Д) $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-(\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2$; Е) $(2\sqrt{5}-\sqrt{15})(\sqrt{15}+2\sqrt{5})-(\sqrt{10}-5\sqrt{2})^2$;

Ё) $(7-\sqrt{3})^2 + (4+\sqrt{3})^2$; Ж) $(5-\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{2})^2$; З) $(8-\sqrt{6})^2 + (5+\sqrt{6})^2$;

И) $(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2$; Й) $(\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}})^2$; К) $(\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{8-2\sqrt{7}})^2$.

3.39 Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении переменной:

А) $\frac{10\sqrt{m}}{n-m} + \frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$ при $n = \frac{4}{9}, m = \frac{16}{81}$; Б) $\frac{-3}{\sqrt{p}-\sqrt{g}} + \frac{6\sqrt{p}}{p-g}$ при $p = \frac{1}{4}, g = \frac{49}{16}$;

В) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-1}$ при $a = \frac{1}{9}$; Г) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+5} + \frac{5\sqrt{b}}{b-25}$ при $b = \frac{25}{4}$;

Д) $\frac{pq}{p+q} \cdot \left(\frac{q}{p} - \frac{p}{q}\right)$ при $p = 3-2\sqrt{2}, q = -2\sqrt{2}$; Е) $\frac{a^2-9b^2}{4a^2} : \frac{4a+12b}{a}$ при $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{18}$.

3.40 Найдите значение выражения:

А) $10ab - (a+5b)^2$ при $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{14}$; Б) $(a+b)^2(a-b)^2$ при $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{2}$;

В) $-24ab + 3(4a+b)^2$ при $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{3}$

3.41 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

А) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; Б) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; В) $\frac{10}{3\sqrt{2}}$; Г) $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$; Д) $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$; Е) $\frac{2}{\sqrt{7}+1}$; Ё) $\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{13}}$; Ж) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;

$$3) \frac{1}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}; \text{И)} \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}; \text{Й)} \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}; \text{К)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-3}.$$

3.42 Сравните числа:

$$\text{А)} \frac{8}{17} \text{ и } \frac{1}{2+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}; \text{Б)} \frac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}} \text{ и } \frac{2}{9}.$$

3.43 Упростите выражение:

$$\text{А)} \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2}+1} - (11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}); \text{Б)} 2\sqrt{3} + 0,25(\sqrt{21}-5)(7+3\sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{7}-4}{1+\sqrt{7}}.$$

3.44 Найдите значение выражения:

$$\begin{aligned} \text{А)} & \frac{12}{12-5\sqrt{6}} - \frac{12}{12+5\sqrt{6}}; \text{Б)} \frac{6}{7-3\sqrt{5}} - \frac{6}{7+3\sqrt{5}}; \text{В)} \frac{18}{8-2\sqrt{7}} - \frac{18}{8+2\sqrt{7}}; \\ \text{Г)} & \frac{3}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1} - \frac{3}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1}; \text{Д)} \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{12}}-1} - \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{12}}+1}; \\ \text{Е)} & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}-1} - \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}+1}; \text{Ё)} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}; \text{Ж)} \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{\sqrt{17}-\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}; \\ 3) & \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3.45 Упростите выражение:

$$\begin{aligned} \text{А)} & \frac{a}{a-1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}; \text{Б)} \frac{c}{c-4} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}-2}; \text{В)} \frac{x}{x-16} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}; \text{Г)} \frac{x+y}{\sqrt{xy}-y} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}; \\ \text{Д)} & \frac{a+b}{2a+2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \text{Е)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+b} - \frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}; \\ \text{Ё)} & \frac{\sqrt{a}-6}{\sqrt{a}} : \frac{a-36}{4a}; \text{Ж)} \frac{\sqrt{m}+9}{\sqrt{m}} : \frac{m-81}{5m}; 3) \frac{\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}} : \frac{x-100}{7x}; \\ \text{И)} & \left(\frac{\sqrt{a}-5}{\sqrt{a}+5} + \frac{20\sqrt{a}}{a-25} \right) : \frac{\sqrt{a}+5}{a-5\sqrt{a}}; \text{Й)} \left(\frac{\sqrt{y}+7}{\sqrt{y}-7} - \frac{28\sqrt{y}}{y-49} \right) : \frac{\sqrt{y}-7}{y+7\sqrt{y}}; \\ \text{К)} & \left(\frac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}+2} + \frac{8\sqrt{m}}{m-4} \right) : \frac{\sqrt{m}+2}{m-2\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

3.46 Докажите, что следующие числа являются взаимно обратными:

$$\begin{aligned} \text{А)} & \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{2-\sqrt{3}}; \text{Б)} 7+4\sqrt{3} \text{ и } 7-4\sqrt{3}; \text{В)} \sqrt{3+2\sqrt{2}} \text{ и } \sqrt{3-2\sqrt{2}}; \\ \text{Г)} & \left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} \right)^{11} \text{ и } \left(\sqrt{9-4\sqrt{5}} \right)^{11}. \end{aligned}$$

3.47 Решите уравнение:

$$\text{А)} x^2 = \left(\sqrt{11-2\sqrt{10}} - \sqrt{11+2\sqrt{10}} \right)^2; \text{Б)} x^2 = \left(\sqrt{5-2\sqrt{3}} - \sqrt{5+2\sqrt{3}} \right)^2.$$

3.48 А) Известно, что $\sqrt{8-x} + \sqrt{x+3} = 4$. Найдите значение выражения $\sqrt{(8-x)(x+3)}$.

Б) Известно, что $\sqrt{y-1} - \sqrt{8-y} = 2$. Найдите значение выражения $\sqrt{(y-1)(8-y)}$.

В) Известно, что $\sqrt{7-z} + \sqrt{z-2} = 3$. Найдите значение выражения $\sqrt{(7-z)(z-2)}$.

Г) Известно, что $\sqrt{a-5} - \sqrt{11-a} = 7$. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)(11-a)}$.

3.4. КАК НАЙТИ КОРЕНЬ БЕЗ ТАБЛИЦ И КАЛЬКУЛЯТОРА ИЛИ ЧЕМУ УЧИЛИ ВАШИХ БАБУШЕК И ДЕДУШЕК

Существует забавный способ вычисления квадратных корней «столбиком». Этому способу учили в школах очень давно. Конечно, в наше время, когда есть калькуляторы, компьютеры это потеряло смысл, но кто знает, что может пригодиться в жизни. Можно попытаться, например, заработать себе на кусок хлеба, извлекая квадратные корни без калькуляторов.

Итак:

Рассмотрим *пример*. Пусть нам надо вычислить $\sqrt{288368}$.

1) Выпишем это число, отделяя справа по 2 знака(если число содержит нечетное число знаков, то в левой группе будет один знак!):

$$\sqrt{28 * 83 * 69 * } =$$

2) Теперь найдем число, квадрат которого наиболее близок к 28, но не превосходит 28.

Это 5. $5^2 = 25$. Записываем пятерку после знака равенства и вычитаем из 28 квадрат пяти, т.е. 25:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28 * 83 * 69 * } = 5 \\ \underline{25} \\ 3 \end{array}$$

3) Сносим следующую группу цифр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28 * 83 * 69 * } = 5 \\ \underline{25} \\ 383 \end{array}$$

4) Удвоим теперь число 5 (это 10) и запишем его слева от числа 383, поставив рядом два знака « »:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28 * 83 * 69 * } = 5 \\ \underline{25} \\ 10 \quad 383 \end{array}$$

5) Подберем теперь вместо знака « » такое однозначное число, чтобы при умножении числа «10 » на число « » (обратите внимание, что вместо « » мы должны подставить **одинаковые** цифры!) получилось наиболее близкое к 383 число, но не превосходящее его. Ясно, что это 3: $103 \cdot 3 = 109$; 4 уже не подходит: $104 \cdot 4 = 416$. Умножаем 103 на 3 и подписываем результат под 383. Записываем так:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28 * 83 * 69 * } = 5 \\ \underline{25} \\ 103 \quad 383 \\ 3 \quad 309 \end{array}$$

6) Вычитаем из 383 число 309 и сносим следующую группу цифр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28 * 83 * 69 * } = 5 \\ \underline{25} \\ 103 \quad 383 \\ 3 \quad 309 \\ \hline 7469 \end{array}$$

7) Записываем цифру 3 после 5 в результате:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28*83*69*} = 53 \\ \underline{25} \\ 103 \quad 383 \\ \quad \underline{3 \quad 309} \\ \quad \quad 7469 \end{array}$$

8) Теперь удваиваем число 53 (это 106) и записываем его слева от 7469 и ставим рядом два знака « » (повторяем описанное в шаге 4):

$$\begin{array}{r} \sqrt{28*83*69*} = 53 \\ \underline{25} \\ 103 \quad 383 \\ \quad \underline{3 \quad 309} \\ 106 \quad 7469 \end{array}$$

9) Повторяем процедуру, описанную в шаге 5: вместо « » подбираем однозначное число так, чтобы при умножении числа 106 на число получалось наиболее близкое к 7469 число, не превосходящее его. Это число 7. Вычитаем из 7469 результат умножения 1067 на 7. Разность оказалась равна 0. Процесс извлечения корня закончен. Записываем 7 в результат после 3:

$$\begin{array}{r} \sqrt{28*83*69*} = 537 \\ \underline{25} \\ 103 \quad 383 \\ \quad \underline{3 \quad 309} \\ 1067 \quad 7469 \\ \quad \underline{7 \quad 7469} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

Таким образом, оказалось, что число 288369 является квадратом числа 537(проверьте!)

Рассмотрим еще один **пример**. Вычислим $\sqrt{4056196}$.

1) Выпишем это число, отделяя справа по 2 знака(т.к. число содержит нечетное число знаков, то в левой группе будет один знак!):

$$\sqrt{4*05*61*96} =$$

2) Теперь найдем число, квадрат которого наиболее близок к 4, но не превосходит 4. Нам повезло. $2^2 = 4$. Записываем 2 после знака равенства и вычитаем из 4 квадрат двойки:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4*05*61*96} = 2 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

3) Сносим следующую группу цифр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4*05*61*96} = 2 \\ \underline{4} \\ 005 \end{array}$$

4) Удвоим теперь число 2 (это 4) и запишем его слева от числа 005, поставив рядом два знака «?»:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4*05*61*96} = 2 \\ \underline{4} \\ 4 \quad 005 \end{array}$$

5) Подберем теперь вместо знака « » такое однозначное число, чтобы при умножении числа «4 » на число « » получилось наиболее близкое к 005 число, но не превосходящее его. Ясно, что это 0. Записываем так:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 2 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \end{array}$$

6) Умножаем 40 на 0 (это, как известно 0) и вычитаем из 005 число 0, сносим следующую группу цифр и записываем 0 после 2 в результате:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 20 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \quad 000 \\ \hline 561 \end{array}$$

7) Удваиваем число 20 (это 40) и записываем его слева вместе со знаками « »:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 20 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \quad 000 \\ 40 \quad 561 \end{array}$$

8) Подберем теперь вместо знака « » такое однозначное число, чтобы при умножении числа «40 » на число « » получилось наиболее близкое к 561 число, но не превосходящее его. Ясно, что это 1(2 уже не подходит: $402 \cdot 2 = 804!$) Записываем так:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 20 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \quad 000 \\ 401 \quad 561 \\ 1 \end{array}$$

9) Умножаем 401 на 1, подписываем результат под 561, производим вычитание, сносим последнюю группу цифр и не забываем написать 1 после 0 в результате:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 201 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \quad 000 \\ 401 \quad 561 \\ 1 \quad 401 \\ \hline 16096 \end{array}$$

10) И опять удваиваем 201 и записываем слева вместе с « »:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 201 \\ \underline{4} \\ 40 \quad 005 \\ 0 \quad 000 \\ 401 \quad 561 \\ 1 \quad 401 \\ 402 \quad 16096 \end{array}$$

$$\sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 201$$

$$\begin{array}{r} 40 \quad \underline{4} \quad 005 \\ 0 \quad \underline{000} \\ 401 \quad 561 \\ 1 \quad \underline{401} \\ 4024 \quad 16096 \\ 4 \quad \underline{16096} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{4 * 05 * 61 * 96} = 2014$$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 401} \\ \underline{400} \\ 1 \\ \underline{40} \\ 4 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

И, напоследок, еще один **пример**, который показывает, что этот способ пригоден для вычисления таких выражений как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ с любой наперед заданной точностью. Вычислим, например, значение $\sqrt{2}$ с точностью, скажем, до третьего знака после запятой:

$$1) \sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} =$$

2) Теперь найдем число, квадрат которого наиболее близок к 2, но не превосходит 2. Конечно, это 1. Записываем 1 после знака равенства, ставим десятичную запятую (т.к. с целой частью мы уже покончили) и вычитаем из 2 квадрат единицы, т.е. 1:

$$-\sqrt{2,00*00*00*00*....}=1,$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1}$$

$$\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{100}$$

34

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,4$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 4 \end{array}$$

6) Сносим следующую порцию нулей:

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,4$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 400 \end{array}$$

7) Удваиваем 14 и записываем слева от 400 с « »:

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,4$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 28 \quad 400 \end{array}$$

8) Опять подбираем вместо « » цифру, чтобы получить при умножении наиболее близкий к 400 результат. Это 1. (2 уже много: $282 \cdot 2 = 564$!). Вычитаем из 400 число 281 и записываем 1 после четверки в результат:

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,41$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 281 \quad 400 \\ 1 \quad \underline{281} \\ 119 \end{array}$$

9) Сносим еще одну порцию нулей, удваиваем 141 и записываем со знаками « »:

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,41$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 281 \quad 400 \\ 1 \quad \underline{281} \\ 282 \quad 11900 \end{array}$$

10) Подбираем вместо « » цифру. Это 4. Записываем 4 в результат.

$$-\sqrt{2,00 * 00 * 00 * 00 * \dots} = 1,414$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 100} \\ 4 \quad \underline{96} \\ 281 \quad 400 \\ 1 \quad \underline{281} \\ 2824 \quad 11900 \end{array}$$

$$3 \quad 11296$$

$$4$$

$$5 \quad \text{Желающие могут продолжить дальше!}$$

Глава 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 Решите уравнение:

А) $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$; Б) $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)$; В) $(x+5)^3 = 25(x+5)$.

4.2 Решите уравнение:

А) $(3x-5)^2 = (4x+1)^2$; Б) $(6x-11)^2 = (19x-77)^2$; В) $(54x-57)^2 = (14x-67)^2$;

Г) $(13x-19)^2 = (19x-13)^2$.

4.3 Решите уравнение:

А) $(3x+4)(5x+1) = 0$; Б) $(-5x-15)(x-7) = 0$; В) $(-9x-8)(-x-7) = 0$; Г) $(3-9x)(5-x) = 0$.

4.4 Решите уравнение:

А) $(4x-1)^2 = (4x-1)(x+7)$; Б) $(3x-4)(2x-3) = (2x-3)^2$; В) $(7x+4)(1-x) = (7x+4)^2$;

Г) $(5x+3)^2 = (4x-1)(5x+3)$; Д) $(x-2)^2 = (2-x)(3x-5)$; Е) $(6x+5)(1-5x) = (5x-1)^2$;

Ё) $(19x-7)^2 = (7-19x)(7x-19)$; Ж) $(x-8)(8x-1) = (1-8x)^2$.

4.5 Решите уравнение:

А) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; Б) $2x^3 - 7x^2 - 18x + 56 = 0$; В) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$;

Г) $-x^4 + x^3 + 6x + 36 = 0$.

4.2 НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.6 Решите уравнение:

А) $4x^2 - 13x = 0$; Б) $5x^2 + 10x = 0$; В) $8x^2 - x = 0$; Г) $9x^2 + x = 0$; Д) $15x^2 = 7x$;

Е) $9x^2 = -2x$; Ё) $x^2 = x$; Ж) $7x^2 = -x$; З) $6x = -9x^2$; И) $11x - 5x^2 = 0$; Й) $3x^2 + x = 0$;

К) $15x^2 = -35x$; Л) $x = x^2$; М) $8x = -x^2$.

4.7 Решите уравнение:

А) $3x^2 - 8 = 0$; Б) $5x^2 - 25 = 0$; В) $-7x^2 = -1$; Г) $9x^2 = 8$; Д) $4x^2 - 49 = 0$; Е) $50 - 2x^2 = 0$;

Ё) $16x^2 + 1 = 0$; Ж) $5 - x^2 = 0$; З) $-9x^2 + 10 = 0$; И) $22x^2 - 88 = 0$; Й) $-3 - 2x^2 = 0$;

К) $-9 + 4x^2 = 0$; Л) $-60x^2 = -15$; М) $-25x^2 = 1$.

4.8 Решите уравнение:

А) $(15-x)(x-2) = (x-6)(x+5)$; Б) $(x-2)(x+4) + (x+8)(x-2) = 0$;

В) $(x-1)(x-2) + (x+4)(x-4) + 3x = 0$; Г) $(2x-3)(x+1) + (x-6)(x+6) + x = 0$.

4.9 Решите уравнение:

А) $x^2 - 10x + 25 = 0$; Б) $x^2 + 16x + 64 = 0$; В) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; Г) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;

Д) $4x^2 + 20x + 25 = 0$; Е) $16x^2 - 24x + 9 = 0$.

4.10 Решите уравнение:

А) $9x^2 - 2|x| = 0$; Б) $5x^2 - 6|x| = 0$; В) $3x^2 + 2|x| = 0$; Г) $4x^2 + |x| = 0$; Д) $x^2 + |x| = 10x$;
 Е) $4x^2 - 3x = |x|$; Ё) $x|x| + 6x = 0$; Ж) $2x|x| - 5x = 0$.

4.11 Решите уравнение:

А) $\sqrt{x^2 - 9} + |4x^2 + 12x| = 0$; Б) $\sqrt{16 - x^2} + |x^2 + 4x| = 0$; В) $x^2 - \sqrt{1 - x} = 4x - \sqrt{1 - x}$;
 Г) $8x^2 + \sqrt{7x - 1} = x + \sqrt{7x - 1}$.

4.12 Решите уравнение относительно x :

А) $a^2x^2 + ax = 0$; Б) $a^2x^2 - 2ax = 0$.

4.3 ЕЩЁ РАЗ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

4.13 Вычислите наиболее рациональным способом:

А) $\sqrt{16 + 4 \cdot 4 \cdot 24}$; Б) $\sqrt{64 + 4 \cdot 84}$; В) $\sqrt{83^3 \cdot 2^2 - 83^2 \cdot 2^3}$; Г) $\sqrt{25^3 \cdot 24^2 + 25^2 \cdot 24^3}$;
 Д) $\sqrt{25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 72}$; Е) $\sqrt{52^2 - 4 \cdot 3 \cdot 192}$; Ё) $\sqrt{90^2 - 4 \cdot 25 \cdot 81}$; Ж) $\sqrt{84^2 - 4 \cdot 36 \cdot 49}$;
 З) $\sqrt{2^2 + 4 \cdot 15}$; И) $\sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}$; Й) $\sqrt{17^2 - 4 \cdot 16}$; К) $\sqrt{50^2 - 4 \cdot 7 \cdot 7}$; Л) $\sqrt{4^2 + 4 \cdot 5 \cdot 12}$;
 М) $\sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}$.

4.4 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.14 Решите уравнение, используя «четную» формулу:

А) $x^2 - 18x + 77 = 0$; Б) $x^2 - 22x + 72 = 0$; В) $3x^2 - 16x + 21 = 0$; Г) $5x^2 - 18x + 16 = 0$;
 Д) $21x^2 - 2x - 3 = 0$; Е) $2x^2 - 4x - 17 = 0$; Ё) $x^2 - 10x - 37 = 0$; Ж) $3x^2 - 4x - 5 = 0$;
 З) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; И) $5x^2 - 16x + 3 = 0$; К) $4x^2 - 36x + 77 = 0$; Л) $8x^2 - 14x + 5 = 0$;
 М) $15y^2 - 22y - 37 = 0$; Н) $7z^2 - 20z + 14 = 0$; О) $23a^2 + 2a - 25 = 0$; П) $n^2 - 34n + 289 = 0$;
 Р) $t^2 - 28t + 196 = 0$; С) $19x^2 - 2x - 21 = 0$; Т) $13x^2 - 22x + 9 = 0$;
 У) $(4x - 5)(3x + 7) - (x - 2)(4x + 2) = 33x - 9$; Ф) $(2x - 1)^2 - (x - 3)(x + 3) = 2(2x + 3)$;
 Х) $(2x - 3)^2 - (x - 5)(x + 5) = 2(2x + 7)$; Ц) $4(x^2 - 3) = (x - 1)(x + 7) + 4$;
 Ч) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} = 1,75$; Ш) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{12x - 8}{5} = -2$.

4.15 Решите уравнение:

А) $|x^2 - x - 1| = 1$; Б) $|x^2 + 5x - 3| = 3$; В) $x^2 - |x| - 2 = 0$; Г) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$; Д) $x|x| + 8x - 7 = 0$;
 Е) $x|x| + 7x - 6 = 0$; Ё) $x^2 - 5\sqrt{x^2} - 36 = 0$; Ж) $x^2 + 7\sqrt{x^2} - 18 = 0$.

4.16 Решите уравнение:

А) $\frac{x^2 + 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10}$; Б) $\frac{x^2 - 36}{x + 3} = \frac{9x}{x - 3}$; В) $\frac{x^2}{x - 7} = \frac{4x + 21}{x - 7}$; Г) $\frac{5x^2 - x}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$.

4.17 Решите уравнение:

А) $x^2 - 2x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 8$; Б) $x^2 + 15 - \sqrt{3x - 10} = 8x - \sqrt{3x - 10}$;

В) $x^2 - 6x - \frac{x}{x-5} = -5 - \frac{x}{x-5}$; Г) $6x^2 - \frac{x^2+1}{2x-1} - x = 1 - \frac{x^2+1}{2x-1}$; Д) $(\sqrt{x}-3)(18x^2-9x-5)=0$;
 Е) $(\sqrt{x}-11)(-5x^2+11x+26)=0$; Ё) $(x^2+16x)(\sqrt{x}-2)(x^2-2x-24)=0$;
 Ж) $(x^2+7x)(\sqrt{x}-6)(x^2-4x-21)=0$.

4.18 Решите уравнение:

А) $\sqrt{x^2+3x-10} + \sqrt{x^2-10x+16} = 0$; Б) $\sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{x^2+6x+5} = 0$;
 В) $x^2-10x+25 + |x^2-9x+20| = 0$; Г) $x^2-12x+36 + |x^2-4x-12| = 0$;
 Д) $\sqrt{x^2-121} + |x^2+2x-63| = 0$; Е) $\sqrt{x^2-36} + |x^2+6x-16| = 0$;
 Ё) $(2x^3-3x^2-x+5)^2 + (x^2-3x-4)^2 = 0$; Ж) $(2x^2+x-1)^4 + (x^3-5x+4)^2 = 0$.

4.19 При каких значениях параметра a имеет единственный корень уравнение:

А) $3x^2+2x+a=0$; Б) $4x^2+x+a=0$; В) $-2x^2+x+a=0$; Г) $x^2+5x+a=0$;
 Д) $ax^2-3x-7=0$; Е) $ax^2+x+5=0$; Ё) $ax^2+5x-4=0$; Ж) $ax^2+2x-1=0$;
 З) $2x^2+ax+1=0$; И) $3x^2+ax+9=0$; Й) $x^2+2ax-3a=0$; К) $x^2-3ax+a=0$;
 Л) $ax^2-(2a+6)x+3a+3=0$; М) $ax^2+(4a+2)x+3a+1,5=0$; Н) $ax^2-x\sqrt{2}+\frac{a+1}{4}=0$;
 О) $0,25ax^2-6x+a+11=0$; П) $(2-a)x^2+4x+a+2=0$; Р) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$?

4.20 А) При каких значениях a число $1/3$ является корнем уравнения $a^2x^2+ax-2=0$?

Б) При каких значениях a число $1/2$ является корнем уравнения $a^2x^2+2ax-3=0$?

4.21 Площадь прямоугольника равна 14 м^2 . Если его длину уменьшить на 1 м , а ширину увеличить на 3 м , то площадь полученного прямоугольника будет равна 30 м^2 . Найдите ширину первого прямоугольника.

4.22 Площадь прямоугольника равна 36 м^2 . Если его длину увеличить на 6 м , а ширину уменьшить на 1 м , то площадь полученного прямоугольника будет равна 60 м^2 . Найдите длину полученного прямоугольника.

4.23 Одна сторона прямоугольника в 3 раза больше, а другая – на 4 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата, если она больше площади прямоугольника на 10 см^2 .

4.24 Одна сторона прямоугольника на 3 см меньше, а другая – в 2 раза больше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата, если она больше площади прямоугольника на 8 см^2 .

4.25 Требуется огородить участок прямоугольной формы, одна сторона которого на 10 м больше другой. Найдите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2 .

4.26 А) Найдите три последовательных натуральных числа, если удвоенный квадрат первого из них на 26 больше произведения второго и третьего чисел.

Б) Найдите три последовательных натуральных числа, если удвоенный квадрат второго из них на 56 меньше удвоенного произведения первого и третьего чисел.

4.27 А) Найдите четыре последовательных нечетных натуральных числа, если удвоенное произведение второго и третьего чисел на 107 больше произведения первого и четвертого чисел.

Б) Найдите четыре последовательных четных натуральных числа, если утроенное произведение второго и третьего чисел на 344 больше произведения первого и четвертого чисел.

4.28 От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 см. Площадь его оставшейся части равна 10 см^2 . Найдите первоначальные размеры листа жести.

4.29 Цена на холодильник в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. На сколько процентов ежегодно уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 18432 рубля?

4.30 А) Сколько сторон имеет многоугольник, если у него 20 диагоналей?

Б) Сколько сторон имеет многоугольник, если у него 27 диагоналей?

4.31 А) Турнир по быстрым шахматам проводится в один круг, каждый шахматист играет с каждым. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было сыграно 66 партий?

Б) Турнир по подкидному дураку проводится в один круг, каждый игрок играет с каждым. Сколько игроков участвовало в турнире, если всего было проведено 153 игры?

4.32 При каких значениях a прямая $y = ax - 5$ имеет с параболой $y = x^2$ единственную общую точку?

4.33 При каких значениях p прямая $x + y + p = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$?

4.5 ТЕОРЕМА ВИЕТА

4.34 Решите уравнение, не используя формулу:

А) $x^2 + 6x - 7 = 0$; Б) $x^2 - 8x + 15 = 0$; В) $x^2 - x - 12 = 0$; Г) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

Д) $x^2 - 4x + 3 = 0$; Е) $x^2 + 17x - 38 = 0$; Ё) $2x^2 + 7x + 5 = 0$; Ж) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;

З) $463x^2 - 102x - 361 = 0$; И) $x^2 - 4x - 60 = 0$; Й) $1997x^2 - 1000x - 997 = 0$;

К) $x^2 - 2000x - 2001 = 0$; Л) $1999x^2 - 1000x - 999 = 0$; М) $x^2 - 7ax + 12a^2 = 0$;

Н) $x^2 + 5bx + 6b^2 = 0$; О) $7x^2 - 4ax - 3a^2 = 0$; П) $7x^2 + 13bx + 6b^2 = 0$;

Р) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$; С) $x^2 - (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} = 0$; Т) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{6})x + 2\sqrt{3} = 0$;

У) $x^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{15})x - 5\sqrt{3} = 0$.

4.35 Запишите приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

А) 7 и 4; Б) 9 и 12; В) -8 и 11; Г) 5 и -13; Д) -1 и $\sqrt{5}$; Е) $-\sqrt{3}$ и 1; Ё) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{7}$;

Ж) $\sqrt{6}$ и $-\sqrt{5}$; З) $\sqrt{15}$ и $-\sqrt{3}$; И) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{14}$; Й) $3 - \sqrt{5}$ и $3 + \sqrt{5}$;

К) $2 + \sqrt{7}$ и $2 - \sqrt{7}$; Л) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ и $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$; М) $5\sqrt{2} - \sqrt{7}$ и $5\sqrt{2} + \sqrt{7}$; Н) $4a + 1$ и $2 - a$;

О) $3a - 2$ и $a + 3$.

4.36 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения, найдите значение выражений 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$; 5) $x_1^3 + x_2^3$; 6) $x_1^4 + x_2^4$; 7) $\frac{x_2}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_2}$; 8) $|x_1 - x_2|$;

А) $x^2 - 3x - 1 = 0$; Б) $x^2 - 2x - 4 = 0$; В) $x^2 - x - 7 = 0$; Г) $x^2 + 3x - 5 = 0$;

Д) $2x^2 + x - 2 = 0$; Е) $3x^2 - x - 5 = 0$.

4.37 А) Число -12 является корнем уравнения $x^2 + 15x + q = 0$. Найдите q и второй корень.

Б) Число -7 является корнем уравнения $x^2 - 13x + q = 0$. Найдите q и второй корень.

В) Число -4 является корнем уравнения $x^2 - 11x + q = 0$. Найдите q и второй корень.

4.38 А) Число 6 является корнем уравнения $x^2 + bx - 30 = 0$. Найдите b и второй корень.

Б) Число 4 является корнем уравнения $x^2 + bx - 24 = 0$. Найдите b и второй корень.

В) Число 8 является корнем уравнения $x^2 + bx - 32 = 0$. Найдите b и второй корень.

4.39 А) Один из корней уравнения $x^2 - 19x + a = 0$ на 3 больше другого. Найдите a и корни уравнения.

Б) Один из корней уравнения $x^2 - 16x + a = 0$ на 2 меньше другого. Найдите a и корни уравнения.

В) Один из корней уравнения $x^2 - 7x + a = 0$ на 5 меньше другого. Найдите a и корни уравнения.

4.40 А) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + kx + 150 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 6x_2$. Найдите k и корни уравнения.

Б) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + kx + 16 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 4x_2$. Найдите k и корни уравнения.

В) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + kx + 15 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 3x_2$. Найдите k и корни уравнения.

4.41 А) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + p = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - 5x_2 = 5$. Найдите p и корни уравнения.

Б) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 2x + p = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 + 3x_2 = 1$. Найдите p и корни уравнения.

В) Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3x + p = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - 4x_2 = 37$. Найдите p и корни уравнения.

4.42 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 13x - 17 = 0$, запишите уравнение, корнями которого являлись бы числа $2 - x_1$ и $2 - x_2$.

4.43 А) Не вычисляя корней уравнения $3x^2 - 7x + 3 = 0$, запишите уравнение, корни которого в 3 раза больше соответствующих корней этого уравнения.

Б) Не вычисляя корней уравнения $5x^2 - 18x + 8 = 0$, запишите уравнение, корни которого в 2 раза меньше соответствующих корней этого уравнения.

В) Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 13x + 5 = 0$, запишите уравнение, корни которого в 4 раза больше соответствующих корней этого уравнения.

4.44 А) Сумма квадратов корней уравнения $2x^2 + ax - 3 = 0$ равна $37/4$. Найдите a .

Б) Сумма квадратов корней уравнения $4x^2 - ax - 5 = 0$ равна $11/4$. Найдите a .

В) Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 1 = 0$ равна $22/9$. Найдите a .

4.45 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x - 46 = 0$, запишите уравнение, корнями которого являлись бы числа $2x_1 + x_2$ и $x_1 + 2x_2$.

4.46 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$, запишите квадратное уравнение, единственным корнем которого явилось бы число $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$.

4.47 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + 3 = 0$, запишите уравнение, корнями которого являлись бы числа -1 и $\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}$.

4.48 А) Решите уравнение $2x^2 + 3x - 17 = 2(2 - \sqrt{7})^2 + 3(2 - \sqrt{7}) - 17$ и укажите какое-нибудь рациональное число, заключенное между его корнями.

Б) Решите уравнение $4x^2 - 9x - 11 = 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 9(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 11$ и укажите все целые числа, заключенные между его корнями.

4.6 УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ

4.49 Решите уравнение:

А) $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$; Б) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$; В) $x^4 - 2x^2 - 35 = 0$;

Г) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$; Д) $3x^4 - 13x^2 - 16 = 0$; Е) $5x^4 + 17x^2 + 12 = 0$;

Ё) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$; Ж) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$; З) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$;

И) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$; Й) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; К) $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$;

Л) $5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; М) $x^4 - 82x^2 + 81 = 0$; Н) $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$

О) $4x^4 - 21x^2 + 5 = 0$; П) $3x^4 + 16x^2 - 12 = 0$; С) $4 \cdot \left(2x - \frac{1}{6}\right)^4 + 7 \cdot \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 - 2 = 0$;

Т) $9 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)^4 + 14 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)^2 - 8 = 0$; У) $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$.

4.50 Решите уравнение:

А) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 17) + 60 = 0$; Б) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) = -24$;

В) $(x^2 + 3x - 5)(x^2 + 3x + 1) = -8$; Г) $(3x^2 - 2x - 7)(3x^2 - 2x + 1) + 12 = 0$;

Д) $(x^2 - 3x - 2)(2x^2 - 6x - 5) = 3$; Е) $(3x^2 - 15x + 3)(x^2 - 5x - 1) = 24$;

Ё) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$; Ж) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = 144$;

З) $(x-3)(x+2)(x-6)(x-1) + 56 = 0$; И) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 360$;

Й) $(x-2)(x+2)(x+6)(x+10) = 144$; К) $(x^2 - 2x)^2 - 5x(x-2) + 6 = 0$;

Л) $(x^2 + 3x - 1)^2 + 6x(x+3) - 33 = 0$; М) $(x^2 + 4x - 4)^2 - 9x^2 - 36x + 44 = 0$.

4.51 Решите уравнение:

А) $x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 2x - 10 = 0$; Б) $2x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 10x - 15 = 0$.

4.52 Решите уравнение:

А) $x - \sqrt{x} = 12$; Б) $x + 2\sqrt{x} = 8$; В) $2x - 13 = 11\sqrt{x}$; Г) $3 - 5x = 8\sqrt{x}$.

4.53 Решите уравнение:

А) $x - 6 - 4\sqrt{x-1} = 0$; Б) $\sqrt{x+3} + x + 1 = 0$; В) $3\sqrt{2x-3} = 7 - 2x$; Г) $5\sqrt{4x-3} + 4x - 9 = 0$;
Д) $x - 4 + \sqrt{x+2} = 0$.

4.54 Решите уравнение:

А) $x^4 = (x - 20)^2$; Б) $(3x - 4)^2 = x^4$; В) $x^4 = (6x - 5)^2$; Г) $x^4 = (2x + 3)^2$.

4.55 Решите уравнение:

А) $4x^2 - 4x + 1 = 3|2x - 1|$; Б) $x^2 - 2x + 1 - |x - 1| = 2$; В) $25x^2 - 10x - 2|5x - 1| - 2 = 0$;
Г) $9x^2 - 6x + 5|3x - 1| - 13 = 0$.

4.56 А) На рисунке А изображен график функции $y = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

Найдите координаты точек К, L и M.

Б) На рисунке Б изображен график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$.

Найдите координаты точек А, В и С.

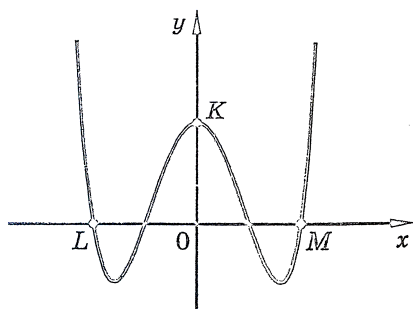


Рис. А

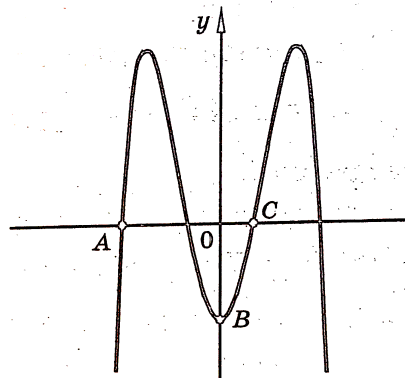


Рис. Б

4.7 СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.57 Решите систему уравнений:

А) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -14 \end{cases}$; Б) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -15 \end{cases}$; В) $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$; Г) $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12 \end{cases}$; Д) $\begin{cases} 2xy = 5 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$;
Е) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$; Ё) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$; Ж) $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy + y^2 = 6 \end{cases}$; З) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y - x = 2 \end{cases}$;
И) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x^2 + 3xy + 9 = 0 \end{cases}$; Й) $\begin{cases} 3y + x + 1 = 0 \\ 2x^2 - xy - y = 35 \end{cases}$.

4.58 Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{А)} \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x^2 - 4 = 4y \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 6x - y^2 - 3 = 0 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = -7 \\ x - y = 5 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} y - x = 2 \\ y^2 - 2xy - x^2 = -28 \end{cases}; \\ \text{Д)} \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 18 \end{cases}; \text{Е)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}; \text{Ё)} \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy \end{cases}; \\ \text{Ж)} \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 9 + 2xy \end{cases}; \text{З)} \begin{cases} 2x^2 - 5x = y \\ 2x - 5 = y \end{cases}. \end{aligned}$$

4.59 Решите систему уравнений:

$$\text{А)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} 9x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 4 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}.$$

4.60 Решите систему уравнений:

$$\text{А)} \begin{cases} (x+1)(2y-1)=0 \\ 4xy-x^2-2y^2=1 \end{cases}; \text{Б)} \begin{cases} (2x-5)(y+2)=0 \\ x^2+xy+y^2=4 \end{cases}; \text{В)} \begin{cases} \frac{x+5}{y-3}=0 \\ 2y^2+x^2-y=40 \end{cases}; \text{Г)} \begin{cases} \frac{2y-3}{x+2}=0 \\ x^2+xy+y^2=10 \end{cases}.$$

4.8 РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Теорема. Пусть многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 . Тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)(**).$$

Доказательство: По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (**). Раскрывая скобки в правой части равенства (*), получаем:

$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$. Подставив в последнее выражение вместо $x_1 + x_2$ и x_1x_2 соответствующие выражение из формул Виета (**), получаем требуемое равенство.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $-7x^2 + 3x + 10$.

Решение:

1. Записываем так: $-7x^2 + 3x + 10 = -7($

(Обязательно записываем старший коэффициент, иначе потом забудем!)

2. Находим корни уравнения $-7x^2 + 3x + 10 = 0$. Его корни $x_1 = -1, x_2 = \frac{10}{3}$. (Проверьте!)

3. Возвращаясь к записи п.1, имеем $-7x^2 + 3x + 10 = -7(x - (-1))(x - \frac{10}{3}) = -7(x + 1)(x - \frac{10}{3})$.

Пример 2. Сократить дробь $\frac{-2x^2 + 5x - 2}{4x^2 - 1}$.

Решение:

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби. Тогда:

$$\frac{-2x^2 + 5x - 2}{4x^2 - 1} = \frac{-2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{-(x-2)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{-(x-2)}{2x+1} = \frac{2-x}{2x+1}.$$

4.61 Разложите на множители:

- А) $-2x^2 + 5x - 3$; Б) $6x^2 - x - 1$; В) $x^2 - 11x + 30$; Г) $\frac{1}{3}x^2 + x - 6$; Д) $-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$;
Е) $13x^2 - 15x - 28$; Ё) $6x^2 + 5x - 4$; Ж) $-x^2 + 33x + 60$; З) $2x^2 - 7x + 6$; И) $-2x^2 - 7x + 4$.

4.62 Сократите дробь:

- А) $\frac{4x+8}{3x^2+5x-2}$; Б) $\frac{3x^2-12}{3x^2-7x+2}$; В) $\frac{2x^2+5x+2}{8-2x^2}$; Г) $\frac{42-x-x^2}{2x^2-13x+6}$;
Д) $\frac{3x^2-11x-4}{12+x-x^2}$; Е) $\frac{3x^2-2x}{6-7x-3x^3}$; Ё) $\frac{-3x^2+7x-2}{2-6x}$; Ж) $\frac{36-36x+x^2}{3x^2+3x-18}$.

4.63 Найдите значение выражения:

- А) $\frac{10x^2-13x-3}{-2x^2+x+3}$ при $x = -6,2$; Б) $\frac{-15x^2+13x-2}{3x^2-8x+4}$ при $x = 4,2$;
В) $\frac{9x^2-6x+1}{6x^2+x-1}$ при $x = -1\frac{1}{6}$; Г) $\frac{8x^2-2x-1}{16x^2+8x+1}$ при $x = -1\frac{1}{4}$.

4.64 Упростите выражение:

- А) $\frac{2x^2+3x-2}{2x-1} - \frac{4-x^2}{x+2}$; Б) $\frac{3x^2-8x-3}{3x+1} - \frac{x^2-9}{3-x}$.

4.65 Упростите выражение:

- А) $\frac{x+12}{x^3-9x} : \left(\frac{x-3}{2x^2+5x-3} - \frac{9}{9-x^2} \right)$; Б) $\left(\frac{3a-1}{a^2-4} - \frac{9a}{3a^2+5a-2} \right) \cdot \frac{15a^3-60a}{12a+1}$.

4.66 Сократите дробь:

- А) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$; Б) $\frac{x^3-4x^2-9x+36}{x^2-7x+12}$.

4.67 Постройте график функции и выясните, при каких значениях b прямая $y = -2x + b$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки:

- А) $y = \frac{x^2+3x-18}{x-3}$; Б) $y = \frac{x^2-3x-10}{x+2}$; В) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-1}$; Г) $y = \frac{x^2-x-56}{x+7}$.

4.68 Разложите на множители:

- А) $x^2 - 2xy - 63y^2$; Б) $x^2 + xy - 6y^2$; В) $x^2 + 4xy - 5y^2$; Г) $15x^2 + 14xy - 8y^2$;
Д) $6x^2 - xy - y^2$; Е) $2x^2 + 7xy + 3y^2$.

4.69 Для каждого значения a решите уравнение:

- А) $(a-5)x = a^2 - 7a + 10$; Б) $(a+4)x = a^2 + 11a + 28$; В) $(a^2 - 36)x = a^2 + 2a - 24$;
Г) $(a^2 - 13a + 40)x = a^2 - 64$.

4.9 ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.70 Решите уравнение:

А) $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+13} = \frac{2}{21}$; Б) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+6} = \frac{5}{28}$; В) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = 0,25$;
Г) $\frac{14}{x^2-2x} - \frac{21}{x^2+2x} = \frac{5}{x}$; Д) $\frac{42}{x^2+5x} - \frac{3}{x^2-5x} = \frac{7}{x}$; Е) $\frac{5}{x^2+3x} - \frac{15}{x^2-3x} = \frac{16}{x}$;
Ё) $\frac{1}{x-5} - \frac{2}{x^2+5x} = \frac{20}{x^3-25x}$; Ж) $\frac{1}{x-4} - \frac{3}{x^2+4x} = \frac{24}{x^3-16x}$; З) $\frac{1}{x+6} + \frac{3}{x^2-6x} = \frac{72}{x^3-36x}$;
И) $\frac{3}{x-2} - \frac{13}{x^2+2x+4} = \frac{26+5x}{x^3-8}$; Й) $\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2+3x+9} = \frac{6+7x}{x^3-27}$;
К) $\frac{1}{x-4} - \frac{3}{x^2+4x+16} = \frac{9x+12}{x^3-64}$.

4.71 Решите уравнение:

А) $\frac{42}{x^2+5x} - \frac{3}{x^2-5x} = \frac{7}{x}$; Б) $\frac{x}{x+8} + \frac{x+8}{x-8} = \frac{x^2+x+72}{x^2-64}$; В) $\frac{3x-5}{x^2-1} = \frac{3x+2}{x^2+x} - \frac{6x-5}{x^2-x}$;
Г) $\frac{3}{3x^2+x} - \frac{4}{9x^2-1} = \frac{2}{9x^2+6x+1}$; Д) $\frac{2x+5}{x^2+x} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x+1} = 0$; Е) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = 0$;
Ё) $\frac{3}{x} + \frac{33}{x^2-11x} = \frac{x-4}{x-11}$; Ж) $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$; З) $\frac{2}{x} + \frac{10}{x^2-2x} = \frac{1+2x}{x-2}$;
И) $\frac{1}{x-3} + \frac{18}{x^2-9} = \frac{x}{x+3}$; Й) $\frac{1}{x} + \frac{12}{3x-x^2} = \frac{3x-5}{3-x}$; К) $\frac{1}{x-4} + \frac{24}{x^2-16} = \frac{x+1}{x+4}$;
Л) $\frac{1}{x+4} - \frac{8}{x^2-16} = \frac{x-5}{x-4}$; М) $\frac{1}{x} + \frac{10}{5x-x^2} = \frac{x-3}{5-x}$; Н) $\frac{1}{x} + \frac{24}{3x-x^2} = \frac{x+5}{3-x}$;
О) $\frac{1}{5-x} + \frac{90}{25-x^2} = \frac{4-x}{x+5}$.

4.72 Решите уравнение:

А) $\frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$; Б) $\frac{3x+1}{x-3} - \frac{2x-3}{4x+3} = -7\frac{1}{11}$; В) $\frac{x+0,5}{9x+3} + \frac{8x^2+3}{9x^2-1} = \frac{x+2}{3x-1}$;
Г) $\frac{1-2x}{6x^2+3x} + \frac{2x+1}{14x^2-7x} = \frac{8}{12x^2-3}$.

4.73 Решите уравнение:

А) $\frac{3}{x^2-2x+1} + \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x+1}$; Б) $\frac{4}{x^2+6x+9} - \frac{6}{9-x^2} = \frac{1}{x-3}$;
В) $\frac{2}{x^2+10x+25} - \frac{10}{25-x^2} = \frac{1}{x-5}$; Г) $\frac{1}{x^2-12x+36} + \frac{12}{36-x^2} = \frac{1}{x+6}$;
Д) $\frac{5}{x^2+2x+1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$; Е) $\frac{3}{x^2-6x+9} + \frac{6}{9-x^2} = \frac{1}{x+3}$.

4.74 Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

А) $y = x^2 + \frac{1}{x-4}$ и $y = \frac{4x-15}{x-4}$; Б) $y = x^2 - \frac{2}{x-3}$ и $y = \frac{9x-29}{x-3}$.

4.75 Найдите нули функции:

А) $f(x) = (x^2 - 25) \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x} \right)$; Б) $f(x) = (x^2 - 3x) \left(\frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+3} \right)$.

4.76 Решите уравнение:

А) $2 \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^2 - \frac{7(x+3)}{x-1} + 5 = 0$; Б) $5 \left(\frac{2+x}{1-x} \right)^2 + \frac{4+2x}{1-x} - 3 = 0$;

В) $6 \cdot \left(\frac{2x+3}{3x+2} \right)^2 - 13 \cdot \frac{2x+3}{3x+2} + 6 = 0$; Г) $3 \cdot \left(\frac{x+3}{1-3x} \right)^2 + 10 \cdot \frac{x+3}{1-3x} + 3 = 0$.

4.77 Решите уравнение:

А) $\frac{x+4}{x-2} + \frac{x-2}{x+4} = 5,2$; Б) $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x+3}{x-5} + \frac{5}{2} = 0$; В) $\frac{x-3}{x+2} + \frac{x+2}{x-3} = 4\frac{1}{4}$;

Г) $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2x-2} = -\frac{5}{2}$; Д) $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{6x+3} + \frac{8}{3} = 0$; Е) $\frac{3x-1}{x} - \frac{2x}{15x-5} = 1,8$;

Ё) $\frac{x^2+4x-1}{3} - \frac{4}{3x^2+12x-3} = 1$; Ж) $\frac{x^2+2x-2}{5} - \frac{6}{5x^2+10x-10} = 1$;

З) $\frac{x^2+x-3}{2} - \frac{3}{2x^2+2x-6} = 1$; И) $\frac{x^2-x-1}{x} - \frac{6x}{x^2-x-1} = 5$;

Й) $\frac{x^2+4x-9}{x} - \frac{4x}{x^2+4x-9} = 3$; К) $\frac{6x}{x^2-6x-4} + \frac{x^2-6x-4}{x} = -7$;

Л) $\frac{2}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x^2-5x+7} = \frac{8}{x^2-5x+8}$; М) $\frac{2}{x^2+3x+4} + \frac{3}{x^2+3x+1} - \frac{8}{x^2+3x-2} = 0$;

Н) $\frac{1}{x^2-3x+3} - \frac{6}{x^2-3x+5} = \frac{2}{x^2-3x+4}$; О) $\frac{8}{x^2-6x+12} - x^2 + 6x = 10$;

П) $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$; Р) $\frac{6}{x^2-3x+5} - x^2 + 3x = 4$.

4.78 Решите уравнение:

А) $2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 2 = 0$; Б) $4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 8 \left(x - \frac{1}{x} \right) = 5$;

В) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$; Г) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; Д) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$.

4.79 Решите уравнение:

А) $\frac{x^2-12x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-10x+15}$; Б) $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$;

В) $2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 = \frac{x^2-1}{x^2-4}$; Г) $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x+5} \right)^2 = \frac{2x^2+2x}{x^2+4x-5}$.

4.80 Решите уравнение:

А) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$; Б) $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5$.

4.81 При каких значениях a имеет единственный корень уравнение:

А) $\frac{5x^2-11x-16}{x+a} = 0$; Б) $\frac{9x^2-14x-23}{x+a} = 0$; В) $\frac{7x^2+22x+15}{x+a} = 0$?

4.82 Решите уравнение:

А) $\frac{x^2 + 53x - 54}{x - a} = 0$; Б) $\frac{x^2 - 12x + 27}{x + a} = 0$; В) $\frac{x^2 - 32x - 68}{x + a} = 0$; Г) $\frac{x^2 - 27x - 90}{x^2 - a} = 0$.

4.83 А) Двое рабочих, работая вместе, выполнили заказ за 12 часов. За сколько часов может выполнить этот заказ каждый рабочий самостоятельно, если один из них может выполнить этот заказ на 7 часов быстрее второго?

Б) Два тракториста, работая совместно, вспахали поле за 8 часов. За сколько часов может вспахать это поле каждый тракторист самостоятельно, если одному из них потребуется на это на 12 часов больше, чем второму?

В) Витя и Вася вместе решили листочек № 13 ВМШ за 4 часа. За какое время каждый из них мог бы решить это задание самостоятельно, если Вите на это требуется на 6 часов меньше, чем Васе?

4.84 А) Первый экскаватор работал на рытье котлована 2 ч, после чего к нему присоединился второй экскаватор. Через 1 ч совместной работы была вырыта $\frac{1}{4}$ котлована. За сколько часов может вырыть котлован каждый экскаватор самостоятельно, если второму для этого требуется на 6 ч меньше, чем первому?

Б) Через первую трубу можно заполнить бассейн на 24 ч быстрее, чем через вторую. Сначала открыли вторую трубу, а через 4 ч – первую. Через 10 ч совместной работы двух труб была заполнена $\frac{1}{3}$ бассейна. За сколько часов может заполнить бассейн каждая труба самостоятельно?

В) Первая бригада работала на ремонте дороги 9 ч, после чего к ней присоединилась вторая. Через 6 ч совместной работы была отремонтирована $\frac{1}{2}$ дороги. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада самостоятельно, если второй бригаде для этого требуется на 9 ч меньше, чем первой?

4.85 А) Слиток золота с серебром, содержащий 60 г золота, сплавляли с 60 г золота. Процентное содержание золота в новом слитке на 15% больше, чем в исходном. Сколько граммов серебра содержится в слитке?

Б) Слиток меди и цинка, содержащий 5 кг цинка, сплавляли с 15 кг цинка. Процентное содержание цинка в новом слитке на 30% больше, чем в исходном. Сколько килограммов меди содержится в слитке?

В) Сплав меди и олова, содержащий 30 кг меди, сплавляли с 60 кг меди. Процентное содержание меди в новом слитке на 15% больше, чем в исходном. Сколько килограммов олова содержится в слитке?

4.86 А) В соляной раствор, содержащий 60 г воды, добавили 20 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 5%. Сколько граммов соли содержит раствор?

Б) Раствор содержал 140 г воды. После того, как 50 г воды испарили, концентрация соли повысилась на 10%. Сколько граммов соли содержит раствор?

В) В раствор, содержащий 70 г воды, добавили 200 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 20%. Сколько граммов соли содержит раствор?

5.1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

5.1 Докажите, что при всех значениях переменных верно неравенство:

А) $m(m-n) > n(m-n)$; Б) $a(a+b) > b(a-b)$; В) $a^2 + 5 > 4a$; Г) $y^2 + 10 > -6y$;

Д) $\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2$; Е) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$; Ё) $a^2 + b^2 \geq 2(a+b-1)$;

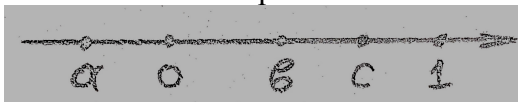
Ж) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$; З) $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2$; И) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

5.2 А) Докажите, что функция $y = x^4 + \frac{1}{x^4}$ при всех значениях аргумента принимает значения, не меньшие 2.

Б) Докажите, что функция $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ при всех значениях аргумента принимает значения, не меньшие 2.

5.2 СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

5.3 На числовой прямой отмечены числа a , b и c . Укажите верные утверждения:



А) $a+b < c$; Б) $ab > c$; В) $bc > 1$; Г) $\frac{1}{b} < 1$; Д) $\frac{1}{c} > 1$; Е) $c+7 > b+7$; Ё) $a+b < a+c$;

Ж) $b-c > 0$; З) $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$; И) $\frac{c}{a} > \frac{b}{a}$.

5.4 Оцените периметр и площадь прямоугольника, если его стороны a и b находятся в границах:

А) $2 < a < 3$, $5 < b < 7$; Б) $1 < a < 4$, $6 < b < 8$; В) $3,2 < a < 3,6$, $8 < b < 8,5$;

Г) $8,3 < a < 8,5$, $4,9 < b < 5,2$.

5.5 Известно, что $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$; $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. Оцените значение величины:

А) $\sqrt{3} + 2$; Б) $1 - \sqrt{7}$; В) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$; Г) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; Д) $\sqrt{21}$; Е) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$; Ё) $\sqrt{12} - \sqrt{7}$;

Ж) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{75}}$; З) $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{7}}{\sqrt{21}}$; И) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$.

5.6 Известно, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцените значение величины:

А) $7 + \sqrt{5}$; Б) $1 - \sqrt{2}$; В) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$; Д) $\sqrt{10}$; Е) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$; Ё) $\sqrt{50} - \sqrt{49}$;

Ж) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{98}}$; З) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.7 Сравните:

А) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ и $\sqrt{5} + 2$; Б) $3 + \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; В) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{5}$; Г) $\sqrt{6} + 2$ и $\sqrt{2} + \sqrt{8}$; Д) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{6} + 2$; Е) $3 + \sqrt{5}$ и $\sqrt{6} + \sqrt{8}$; Ё) $2 + \sqrt{11}$ и $\sqrt{5} + \sqrt{10}$.

5.8 А) Одна из сторон параллелограмма равна 5 см. Оцените длину его смежной стороны, если его периметр больше 44 см.

Б) Одна из сторон параллелограмма равна 8 см. Оцените длину его смежной стороны, если его периметр больше 24 см.

5.9 А) Одна из сторон прямоугольника равна 5 см. Оцените длину его соседней стороны, если его площадь не менее 24 см^2 .

Б) Одна из сторон прямоугольника равна 10 см. Оцените длину его соседней стороны, если его площадь не менее 44 см^2 .

5.10 Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковые расстояния по течению и возвращаются обратно в пункты, откуда они начали движение. В какой реке на это передвижение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

5.11 Михаил Юрьевич и Сергей Александрович вышли из 20-ого кабинета в 30-ый кабинет. Михаил Юрьевич половину затраченного времени от начала движения шел со скоростью v_1 м/мин, а затем – со скоростью v_2 м/мин. Сергей Александрович первую половину пути шел со скоростью v_1 м/мин, а вторую половину – со скоростью v_2 м/мин. Кто из них быстрее пришел из 20-ого в 30-ый кабинет?

5.12 Елена Андреевна проплыла по реке путь АВ по течению и вернулась обратно. Докажите, что средняя скорость Елены Андреевны в этом движении меньше ее собственной скорости (собственная скорость Елены Андреевны и скорость течения реки постоянны).

5.3 ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.13 Решите неравенство:

А) $\frac{3x+7}{8} - \frac{2x+1}{3} \geq \frac{1+x}{2}$; Б) $\frac{4-5x}{3} < \frac{7x+1}{12} - 2x$; В) $\frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leq \frac{7-3x}{10}$;

Г) $\frac{5-2x}{9} \geq \frac{x+2}{15} - \frac{7x-1}{5}$.

5.14 Решите неравенство:

А) $(2 - \sqrt{5})x \leq 1$; Б) $(\sqrt{11} - 4)x > 2$; В) $(2\sqrt{11} - 3\sqrt{5})x > -5$; Г) $(5\sqrt{5} - 8\sqrt{2})x < -3$;

Д) $(1 - \sqrt{2})x \geq 2 - 2\sqrt{2}$; Е) $(2\sqrt{2} - 3)x \leq (\sqrt{2} - 1)^2$.

5.15 Решите неравенство:

А) $\frac{7}{2-7x} \leq 0$; Б) $\frac{1}{11-2x} > 0$; В) $-\frac{15}{2-x} < 0$; Г) $-\frac{6}{3-9x} \geq 0$;

Д) $\frac{2-\sqrt{5}}{4-3x} \leq 0$; Е) $\frac{2\sqrt{2}-3}{4-5x} < 0$.

5.16 А) При каких значениях переменной значение функции $y = \frac{2-3x}{2-\sqrt{5}}$ меньше $2 + \sqrt{5}$?

Б) При каких значениях переменной значение функции $y = \frac{1-5x}{2-\sqrt{7}}$ больше $2 + \sqrt{7}$?

5.17 Найдите, если возможно, наименьшее целое решение неравенства:

А) $\frac{1-x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x+1}{4}$; Б) $\frac{3-2x}{3} - 1 > \frac{3-2x}{6} - x$.

5.18 При каких значениях a уравнение не имеет корней:

А) $ax^2 - 3x - 7 = 0$; Б) $ax^2 + x + 5 = 0$; В) $3x^2 - 2x + a = 0$; Г) $-x^2 + 2x + a = 0$?

5.19 При каких значениях a уравнение имеет 2 различных корня:

А) $-3ax^2 + x + 4 = 0$; Б) $ax^2 + 4x - 5 = 0$; В) $5x^2 + 3x + a = 0$; Г) $x^2 - 8x + 3a = 0$?

5.20 А) При каком значении m сумма корней квадратного уравнения

$4x^2 + (3m-8)x - 19 = 0$ больше 11?

Б) При каком значении m сумма корней квадратного уравнения $3x^2 + (2m-3)x - 10 = 0$ больше 10?

5.21 А) При каких значениях a графики функций $y = 2x + 3$ и $y = x^2 + a$ не имеют общих точек?

Б) При каких значениях a графики функций $y = 3x + 1$ и $y = x^2 + a$ не имеют общих точек?

5.22 А) При каком значении параметра a точка пересечения прямых $y = 2x - 3a + 5$ и $y = 7x - a - 11$ имеет положительную абсциссу?

Б) При каком значении параметра a точка пересечения прямых $y = 7x - 2a + 3$ и $y = 9x - 4a - 13$ имеет отрицательную абсциссу?

5.23 А) При каком значении параметра a точка пересечения прямых $y = 7x - 2a + 3$ и $y = 9x - 4a - 13$ лежит выше оси абсцисс?

Б) При каком значении параметра a точка пересечения прямых $y = 2x - 3a + 5$ и $y = 7x - a - 11$ лежит ниже оси абсцисс?

5.24 А) При каких значениях a прямые $y = a + 2$ и $y = x + 1$ пересекаются в первой четверти?

Б) При каких значениях a прямые $y = a - 1$ и $y = x - 2$ пересекаются в первой четверти?

5.25 А) Итоговая отметка по десятибалльной системе за курс Высшей математики в Заборостроительном Университете вычисляется по формуле:

$0,3 \cdot K + 0,3 \cdot D + 0,4 \cdot Э$, где K – отметка за контрольную работу, D – отметка за домашнюю работу, а $Э$ – отметка за экзамен. Студент Вася получил за контрольную 4, а за домашнюю работу – 8. Какая минимальная оценка за экзамен обеспечит ему итоговую оценку не меньше, чем 6 баллов? (Итоговая оценка округляется до целых баллов по правилу округления чисел!)

Б) Итоговая отметка по десятибалльной системе за курс Высшей математики в Заборостроительном Университете вычисляется по формуле:

$0,3 \cdot K + 0,3 \cdot D + 0,4 \cdot Э$, где K – отметка за контрольную работу, D – отметка за домашнюю работу, а $Э$ – отметка за экзамен. Студентка Аня получила за контрольную 6, а за домашнюю работу – 7. Какая минимальная оценка за экзамен обеспечит ей итоговую оценку не меньше, чем 7 баллов? (Итоговая оценка округляется до целых баллов по правилу округления чисел!)

5.4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

5.26 Решите систему неравенств:

$$A) \begin{cases} 3x-1 < x+5 \\ 7x+4 > 3x \end{cases}; B) \begin{cases} 2x+3 > x-1 \\ 9x-5 < 4x \end{cases}; B) \begin{cases} x \leq 4x+6 \\ \frac{x}{2}-1 < 0 \\ 7-x < 8 \end{cases}; \Gamma) \begin{cases} 2x \leq 9x+21 \\ \frac{x}{2}-2 < 0 \\ 2-x < 4 \end{cases}.$$

5.27 Решите систему неравенств:

$$A) \begin{cases} 3(x-1)-2(2-3x) > 5x-3 \\ 8x-3(2x+5) < 2(x-7) \end{cases}; B) \begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3 < 1-4(x+3) \\ 7(3+5x) < 3x-5(x-2) \end{cases};$$
$$B) \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{7}{4} > \frac{5x}{2}-\frac{7}{8} \\ \frac{2x+1}{4} < 5-\frac{1-2x}{3} \end{cases}; \Gamma) \begin{cases} \frac{2x+1}{3}-3 < x-\frac{3-2x}{5} \\ \frac{x}{3}-\frac{7}{6} < \frac{5x}{3}-\frac{11}{6} \end{cases}.$$

5.28 Решите систему неравенств и укажите, если возможно, наименьшее и наибольшее целое ее решение:

$$A) \begin{cases} 13-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2} < 14-\frac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x) > 18-\frac{5(2x-6)}{2} \end{cases}; B) \begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{3x-1}{6} < \frac{2-x}{12}-\frac{x+1}{2}+3 \\ x > \frac{5x-4}{10}-\frac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}.$$

5.29 Решите систему неравенств:

$$A) \begin{cases} -1 < 1-2x < 2 \\ 3-5x > 0 \end{cases}; B) \begin{cases} 0 < 1-3x < 1 \\ 3-4x < 2 \end{cases}; B) \begin{cases} -3 < 2x-3 < -1 \\ 1-4x < 0 \end{cases}; \Gamma) \begin{cases} -1 < 3-5x < 0 \\ 4-2x < -3 \end{cases}.$$

5.30 Решите неравенство:

A) $|x| \leq 5$; Б) $|x| < 11$; В) $|x| > 3$; Г) $|x| \geq 9$; Д) $6 < |x| < 8$; Е) $1 \leq |x| < 3$; Ё) $4 \leq |x| \leq 5$;
Ж) $6 < |x| \leq 7$.

5.31 Решите неравенство: А) $-4 < 2-3x \leq 1$; Б) $-7 \leq 2-5x < 6$; В) $-4 < 1-4x < 10$;
Г) $-5 \leq 2-3x \leq 8$; Д) $-3 < 1-x \leq 6x+1$; Е) $-2x+3 \leq 3-9x < 10$.

5.32 При каких значениях переменной выражение имеет смысл:

A) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2-x}$; Б) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{2-3x}$; В) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \sqrt{12-3x}$; Г) $\sqrt{4+x} + \frac{5}{\sqrt{15-5x}}$;
Д) $\frac{x-2}{\sqrt{3-6x}} + \frac{x}{\sqrt{2x+5}} - \frac{1}{x}$; Е) $\frac{2}{x} - \frac{x}{\sqrt{5-x}} + \frac{3x-1}{\sqrt{6x+1}}$?

5.33 Укажите допустимые значения переменной:

A) $y = \frac{5x-3\sqrt{x-7}}{x^2+1}$; Б) $y = \frac{5x-3\sqrt{x-7}}{x-7}$; В) $y = \frac{5x-3\sqrt{x-7}}{x+7}$; Г) $y = \frac{5x-3\sqrt{x-7}}{x-17}$.

5.34 Укажите допустимые значения переменной:

А) $y = \frac{2x - 5\sqrt{x-8}}{x^2 + 25}$; Б) $y = \frac{2x - 5\sqrt{x-8}}{x-8}$; В) $y = \frac{2x - 5\sqrt{x-8}}{x+8}$; Г) $y = \frac{2x - 5\sqrt{x-8}}{x-11}$.

5.35 Найдите все значения переменной, при которых определена функция:

А) $y = \frac{\sqrt{4-x} + 11x^2}{3x}$; Б) $y = \frac{\sqrt{4-x} + 11x^2}{x^2 - 6x}$; В) $y = \frac{\sqrt{4-x} + 11x^2}{x^2 - 3x}$; Г) $y = \frac{\sqrt{4-x} + 11x^2}{x^2 - 17}$.

5.36 Найдите все значения переменной, при которых определена функция:

А) $y = \frac{\sqrt{3-x} + 10x^2}{2x}$; Б) $y = \frac{\sqrt{3-x} + 10x^2}{x^2 - 5x}$; В) $y = \frac{\sqrt{3-x} + 10x^2}{x^2 - 3x}$; Г) $y = \frac{\sqrt{3-x} + 10x^2}{x^2 - 11}$.

5.37 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

А) $\frac{8 + \sqrt{x-4}}{\sqrt{9-x} + 2}$; Б) $\frac{3 + \sqrt{x-4}}{\sqrt{9-x}}$; В) $\frac{2 + \sqrt{x-4}}{\sqrt{9-x} - 6}$; Г) $\frac{8 + \sqrt{x-4}}{\sqrt{9-x} - 2}$?

5.38 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

А) $\frac{2 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x} + 1}$; Б) $\frac{2 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x}}$; В) $\frac{2 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x} - 7}$; Г) $\frac{2 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x} - 1}$?

5.39 При каких значениях a уравнение $ax^2 - 3x - 2 = 0$ имеет 2 различных корня одного знака?

5.40 При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a - 6)x + 3a + 9 = 0$ имеет 2 различных корня разных знаков?

5.41 При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0$ имеет два различных действительных положительных корня?

5.42 При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a + 4)x - 5 - 2a = 0$ имеет два различных действительных отрицательных корня?

5.43 А) При каком значении параметра a решением неравенства $-2 \leq 3x - a \leq 5$ является отрезок: 1) содержащий число 0; 2) не содержащий число 0; 3) содержащий единственное целое число 0?

Б) При каком значении параметра a решением неравенства $-1 \leq 3x - a \leq 4$ является отрезок: 1) содержащий число 0; 2) не содержащий число 0; 3) содержащий единственное целое число 0?

5.44 Решите неравенство:

А) $-2 < \frac{1-2x}{3} \leq 1$; Б) $-4 \leq \frac{2-5x}{2} \leq 1$; В) $2 < \frac{1-x}{3} < 3$; Г) $-5 < \frac{2-8x}{3} \leq 0$;
Д) $1-2x \leq \frac{x+3}{4} < 4$; Е) $-5 < \frac{1-4x}{6} < 2x$.

5.45 Решите неравенство:

А) $|3-2x| \leq 3$; Б) $|-5-3x| < 2$; В) $|3x+1| < 3$; Г) $|-8x+1| \leq 1$; Д) $|7-2x| > 2$; Е)

5.46 Решите неравенство: А) $-7 \leq \frac{4-5x}{3} < 1$; Б) $-2 < \frac{1-x}{3} - \frac{2-3x}{2} < 2$;

В) $-3 < \frac{1-6x}{3} - x < 0$.

5.47 Найдите область определения выражения: А) $\frac{3x+2}{\sqrt{2x+3}} - \frac{2}{x-5}$; Б) $\frac{x-6}{x^2+1} - \sqrt{1-11x}$;

В) $\sqrt{2-4x} - \frac{3}{\sqrt{-x-11}}$; Г) $\sqrt{5x-2} + \frac{30}{\sqrt{100-25x}}$.

5.48 При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение:

А) $\begin{cases} x < 3 \\ x > a \end{cases}$; Б) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x > a \end{cases}$; В) $\begin{cases} x \leq 7 \\ x > a \end{cases}$; Г) $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq 2 \end{cases}$?

5.49 При каких значениях a система неравенств не имеет решений:

А) $\begin{cases} x < 4 \\ x > a \end{cases}$; Б) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > a \end{cases}$; В) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq a \end{cases}$; Г) $\begin{cases} x \leq a \\ x > 2 \end{cases}$?

5.50 Существуют ли такие значения a , при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x > 3 \\ x > a \end{cases}$

является промежуток:

А) $(5; +\infty)$; Б) $(3; +\infty)$; В) $[3; +\infty)$; Г) $(2; +\infty)$?

5.51 Существуют ли такие значения a , при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x \leq 5 \\ x < a \end{cases}$

является промежуток:

А) $(-\infty; 7)$; Б) $(-\infty; 5)$; В) $(-\infty; 5]$; Г) $(-\infty; 2)$?

5.52 А) При каких значениях параметра a системе неравенств $\begin{cases} 3x > 20 \\ x \leq a \end{cases}$ удовлетворяют

ровно 8 целых чисел?

Б) При каких значениях параметра a системе неравенств $\begin{cases} 4x > 25 \\ x \leq a \end{cases}$ удовлетворяют

ровно 6 целых чисел?

Глава 6. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

6.1 Вычислите:

А) $\left(\frac{2}{11}\right)^0 - 3^{-3}$; Б) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$; В) $(\sqrt{3})^4 - 3^{-2}$; Г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot 2,5^{-4}$;
Д) $\frac{27^{-6} \cdot 81^{-5}}{3^{-40}}$.

6.2 Представьте числа 100000; 1; 0,1; 0,0001; 0,0000001 в виде степени

А) числа 10; Б) числа 0,1

6.3 Представьте числа 64; 16; 8; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{128}$ в виде степени

А) числа 2; Б) числа $\frac{1}{2}$.

6.4 Представьте числа 81; 27; 9; 3; 1; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{243}$ в виде степени

А) числа 3; Б) числа $\frac{1}{3}$.

6.5 Вычислите:

А) $0,5^{-23} \cdot 2^{-27}$; Б) $0,75^{-12} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-10}$; В) $0,4^{-11} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-13}$; Г) $1,2^{-29} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-27}$.

6.6 Упростите выражение:

А) $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$; Б) $\frac{4 \cdot 36^n}{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}$; В) $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$; Г) $\frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}}$;
Д) $\frac{100^n}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n-2}}$; Е) $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$; Ё) $\frac{2^{n-3} \cdot 5^{2n+1}}{50^{n+1}}$; Ж) $\frac{3^{2n+3} \cdot 5^{n+1}}{45^{n+2}}$.

6.7 Упростите выражение:

А) $\frac{x^5 + x^{-2}}{x^4 + x^{-3}}$; Б) $\frac{a^{-6} + a^{-9}}{a^5 + a^2}$; В) $\frac{0,5^{-2n} + 0,5^{-3n}}{2^{4n} + 2^{3n}}$; Г) $\frac{3^{-3n} + 3^{-2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

6.8 Вычислите:

А) $27^{-3} : 81^{-2}$; Б) $32^{-3} : 16^{-3}$; В) $16^{-7} : 64^{-4}$; Г) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^4}{216^{-4} \cdot (-6)^9}$; Д) $\frac{25^{-8} \cdot 5^7}{(-125)^{-5} \cdot (-5)^4}$;
Е) $\frac{(-49)^{-5} \cdot 7^{-4}}{-7^8 \cdot 343^{-8}}$; Ё) $\frac{21^5 \cdot 3^{-7}}{63^{-2} \cdot 7^8}$; Ж) $\frac{14^6 \cdot 2^{-8}}{28^{-3} \cdot 7^{11}}$; И) $\frac{-0,2^{-6} \cdot 25^{-7}}{125^{-3}}$; Й) $\frac{(-0,5)^{-5} \cdot 4^{-6}}{8^{-2}}$;
К) $\frac{(-0,1)^{-3} \cdot 100^{-5}}{1000^{-2}}$.

6.9 Упростите выражение:

А) $\frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} : \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; Б) $\frac{a^{-2n} - b^{-2n}}{a^{-n} - b^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{a^{-n}} + \frac{1}{b^{-n}}\right)^{-1}$.

6.10 Упростите выражение и приведите его к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

А) $\frac{17x^{-8}}{14y^{-12}} \cdot \frac{28y}{51x^{-21}}$; Б) $\frac{13m^{-10}}{15n^{-14}} \cdot \frac{45n^3}{52m^{-50}}$; В) $\frac{19a^{-15}}{21c^{-4}} : \frac{38a^{-21}}{63c^8}$; Г) $-1,6m^{-4}n^{-3} \cdot (-2m^{-3}n^{-6})^{-3}$;
 Д) $2,7x^{-5}y^4 \cdot (-3x^{-2}y^{-6})^{-2}$; Е) $-3,6b^{-9}c^8 \cdot (-6b^{-4}c^{-3})^{-2}$; Ё) $2\frac{1}{4}a^{-5}b \cdot (1,5a^{-1}b^{-3})^{-3}$;
 Ж) $3\frac{4}{7}a^{-6}b^2 \cdot \left(1\frac{3}{7}a^2b^{-3}\right)^{-2}$; З) $6\frac{1}{4}x^{-2}y^3 \cdot (2,5x^{-3}y^2)$; И) $(-10a^{-2}bc^{-11})^{-2} \cdot (0,1bc^{-2})^{-3}$;
 Й) $(-0,01a^{-3}bc^{13})^{-2} \cdot (10bc^{-5})^{-3}$; К) $(-100m^{-4}np^{10})^{-2} \cdot (0,1mp^{-7})^{-3}$;
 Л) $(-0,2a^{-3}b^{-7})^{-3} \cdot (-5a^2b^6)^{-2}$; М) $\left(-\frac{1}{6}a^{-4}b^{-8}\right)^{-4} \cdot (-6a^3b^7)^{-3}$; Н) $\left(-\frac{1}{7}a^{-6}b^{-9}\right)^{-3} \cdot (-7a^5b^{11})^{-2}$;
 О) $\left(\frac{8p^{-4}}{q^{-1}}\right)^{-2} \cdot (16p^{-6}q^3)^3$; П) $\left(\frac{5a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{-3} \cdot (25a^{-8}b^5)^2$; Р) $\left(\frac{6x^{-1}}{y^{-8}}\right)^{-4} \cdot (36x^{-2}y^7)^3$;
 С) $\frac{x^{-3}-3}{x^{-5}} - \frac{x^{-6}-9}{x^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-3}-3}$; Т) $\frac{y^{-4}+4}{y^{-6}} - \frac{y^{-8}-16}{y^{-6}} \cdot \frac{1}{y^{-4}+4}$; У) $\frac{m^{-2}-5}{m^{-8}} - \frac{m^{-4}-25}{m^{-8}} : (m^{-2}-5)$;
 Ф) $\left(\frac{a^{-5}}{a^{-5}-6} - \frac{2a^{-5}}{a^{-10}-12a^{-5}+36}\right) \cdot \frac{36-a^{-10}}{a^{-5}-8} + \frac{12a^{-5}}{a^{-5}-6}$;
 Х) $\left(\frac{3a^{-4}}{a^{-8}-10a^{-4}+25} - \frac{a^{-4}}{a^{-4}-5}\right) : \frac{8-a^{-4}}{25-a^{-8}} + \frac{10a^{-4}}{a^{-4}-5}$;
 Ц) $\left(\frac{5a^{-6}}{a^{-12}-14a^{-6}+49} - \frac{a^{-6}}{a^{-6}-7}\right) : \frac{12-a^{-6}}{49-a^{-6}} + \frac{14a^{-6}}{a^{-6}-7}$.

6.11 Упростите выражение:

А) $(a^{-3}+2)(a^{-3}-2) - (a^{-3}+3)^2$; Б) $(x^{-4}+5)(x^{-4}-5) - (x^{-4}+6)^2$; В) $(a^{-6}+3)(a^{-6}-3) - (a^{-6}+4)^2$;
 Г) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}$; Д) $\frac{x^{-3}-y^{-3}}{x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}}$; Е) $\frac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$; Ё) $\frac{x^{-2}-5y^{-4}}{4x^{-1}y^{-2}+4y^{-4}} + \frac{y^{-2}}{x^{-1}+y^{-2}}$;
 Ж) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}} + \frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$; З) $\frac{m^{-4}+n^{-6}}{2m^{-4}-2m^{-2}n^{-3}} - \frac{n^{-3}}{m^{-2}-n^{-2}}$; И) $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-6}} : \frac{x^{-2}y^{-2}+x^{-4}}{x^{-4}}$;
 Й) $\frac{m^{-3}-n^{-3}}{m^{-4}} : \frac{m^{-3}n^{-3}-m^{-6}}{m^{-5}}$; К) $\frac{a^{-6}+b^{-6}}{b^{-7}} : \frac{a^{-6}b^{-3}+b^{-9}}{b^{-8}}$.

6.12 Упростите выражение и найдите его значение при заданных значениях переменных:

А) $\frac{10m^{-1}}{m^{-2}-n^{-2}} + \frac{5}{n^{-1}+m^{-1}}$ при $n = \frac{2}{3}$, $m = \frac{4}{9}$; Б) $\frac{-3}{p^{-1}-q^{-1}} + \frac{6p^{-1}}{p^{-2}-q^{-2}}$ при $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{7}{4}$;
 В) $\frac{a^{-1}}{a^{-1}-1} - \frac{a^{-1}}{a^{-2}-1}$ при $a = \frac{1}{3}$; Г) $\frac{b^{-1}}{b^{-1}+4} + \frac{4b^{-1}}{b^{-2}-16}$ при $b = \frac{4}{3}$;
 Д) $\frac{x^2-4^{-1}}{x+2^{-1}} - x$ при $x = 0,137$; Е) $\frac{x^2-9^{-1}}{x-3^{-1}} - x$ при $x = 9,035$.

6.13 Запишите в стандартном виде числа:

А) 78001; Б) 679,65; В) 50; Г) 1000900; Д) 76000; Е) 0,659; Ё) 0,000099; Ж) 0,0337;
 З) 0.0000043; И) 0,00000000854.

6.14 Вычислите значение выражения и запишите результат в стандартном виде:

А) $(2,4 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$; Б) $(1,8 \cdot 10^{-6}) \cdot (8 \cdot 10^9)$; В) $(1,7 \cdot 10^{-11}) \cdot (7 \cdot 10^{15})$; Г) $(4 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,6 \cdot 10^{-9})$;
Д) $(7 \cdot 10^{-2}) \cdot (1,5 \cdot 10^{-5})$; Е) $(3 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,6 \cdot 10^{-13})$; Ё) $\frac{3,2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{11}}$; Ж) $\frac{5,6 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^6}$; З) $\frac{4,2 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^6}$;
И) $\frac{1,2 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 10^3}$; Й) $\frac{1,7 \cdot 10^7}{3,4 \cdot 10^5}$; К) $\frac{1,4 \cdot 10^9}{2,8 \cdot 10^3}$.

6.15 Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F – сила

притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 – массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс тел (в метрах), а γ – гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Пользуясь этой формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 116,725 \text{ Н}$, $m_2 = 4 \cdot 10^8 \text{ кг}$, а $r = 4 \text{ м}$.

6.16 Постройте график функции:

А) $y = \frac{6}{|x|}$; Б) $y = \frac{8}{|x|}$.

6.17 Постройте график функции $y = \frac{6x - 12}{x^2 - 2x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

6.18 Постройте график функции $y = \frac{10x + 10}{x^2 + x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

6.19 Постройте график функции $y = \frac{4x - 8}{2x - x^2}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

6.20 Постройте график функции $y = \frac{12x - 36}{3x - x^2}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

6.21 Постройте график функции $y = \frac{4x^2 - 4}{x^3 - x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

6.22 Постройте график функции $y = \frac{32 - 8x^2}{x^3 - 4x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки? При каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

6.23 Постройте график функции $y = \frac{4x - 8}{x^2 - 2x}$. При каких значениях параметра k прямая

$y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку? При каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

6.24 Постройте график функции $y = \frac{6x + 18}{x^2 + 3x}$. При каких значениях параметра k прямая

$y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку? При каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

6.25 Постройте график функции $y = \frac{2x - 1}{x - 2x^2}$. При каких значениях параметра k прямая

$y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку? При каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

6.26 Постройте график функции $y = \frac{10 - 2x}{x^2 - 5x}$. При каких значениях параметра k прямая

$y = kx$ имеет с графиком этой функции одну общую точку? При каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком этой функции ни одной общей точки?

Глава 7. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

7.1 Первые 3 часа автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 3 часа – со скоростью 35 км/ч, а последние – со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

7.2 Теплоход идет по течению реки в 4,25 раза медленнее, чем скутер против течения, а по течению скутер идет в 9,5 раза быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз собственная скорость скутера больше собственной скорости теплохода?

7.3 Туристы на лодке гребли 1 ч по течению реки и 2 ч плыли по течению, сложив весла. Затем они 5 ч гребли вверх по реке и прибыли к месту старта. Через сколько часов с момента старта вернулись бы туристы, если бы после часовой гребли по течению они сразу стали грести обратно? Скорость лодки в стоячей воде и скорость течения постоянны.

7.4 Туристы на лодке гребли 1 ч по течению реки и 30 минут плыли по течению, сложив весла. Затем они 3 ч гребли вверх по реке и прибыли к месту старта. Во сколько раз скорость течения реки меньше собственной скорости лодки? Скорость лодки в стоячей воде и скорость течения постоянны.

7.5 Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно с ним из пункта А вышел катер. Дойдя до В, катер сразу же развернулся и пошел назад. Какую часть пути от А до В проплывет плот к моменту встречи с катером, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

7.6 Смешали некоторое количество 18%-ого соляного раствора с таким же количеством 30%-ого соляного раствора. Найдите концентрацию полученной смеси.

7.7 Первый сплав содержит 5% кадмия, второй – 11% кадмия. Масса второго сплава больше массы первого на 6 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% кадмия. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

7.8 Туристы на лодке гребли 2 ч вверх по реке и 12 минут шли по течению, сложив весла. Затем они 60 мин гребли вниз по течению и прибыли к месту старта. Во сколько раз скорость течения реки меньше собственной скорости лодки? Скорость лодки в стоячей воде и скорость течения постоянны.

7.9 Смешали 8 л 10%-ого водного раствора некоторого вещества с 12 л 35%-ого водного раствора этого же вещества. Какова концентрация полученного раствора?

7.10 Смешали некоторое количество 17% -ого раствора некоторого вещества с таким же количеством 81%-ого раствора этого же вещества. Какова концентрация полученной смеси?

7.11 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 40 км/ч, проезжает мимо столба за 63 секунды. Найдите длину поезда в метрах.

7.12 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 148 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

- 7.13 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 57 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям навстречу поезду со скоростью 3 км/ч, за 33 секунды. Найдите длину поезда в метрах.
- 7.14 Сергей Александрович и Александр Сергеевич одновременно отправляются из одного и того же места по одной дороге на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,1 км от места отправления. Сергей Александрович идет со скоростью 2,7 км/ч, а Александр Сергеевич – со скоростью 3,5 км/ч. Дойдя до опушки, Александр Сергеевич с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?
- 7.15 По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 м, второй – длиной 80 м. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 м. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 м. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?
- 7.16 Сережа и Дима красят забор за 14 ч, Сережа и Костя красят этот же забор за 15 ч, а Костя и Дима – за 35 ч. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?
- 7.17 Бизнесмен получил в 2000 году прибыль в размере 800000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 7% по сравнению с предыдущим годом. Какую прибыль получил бизнесмен за 2002 год?
- 7.18 Цена на фрукты возросла на 15%, за счет чего на 2300 р. было приобретено фруктов на 3 кг меньше. На сколько рублей возросла цена 1 кг фруктов?
- 7.19 Апельсины подешевели на 30%. Сколько апельсинов теперь можно купить на те же деньги, на которые раньше покупали 2,8 кг?
- 7.20 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же число процентов. В результате они стали стоить на 49% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции в понедельник?
- 7.21 Из города А в город В, расстояние между которыми 110 км, на машине отправился курьер. Через 0,2 ч после этого вслед за ним выехал мотоциклист, который догнав курьера и передав ему дополнительное поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в А в тот момент, когда курьер прибыл в В. Какова скорость курьера, если скорость мотоциклиста равна 60 км/ч?
- 7.22 От почтамта А отправилась автомашина с грузом по направлению к сельскому почтовому отделению В. Через 20 мин вслед за ней выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Догнав машину и передав шоферу посылку, он тотчас повернул обратно. В момент прибытия машины в В мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с машиной до почтамта. Найдите скорость автомашины, если путь от почтамта А до почтового отделения В составляет 82,5 км.
- 7.23 Два велосипедиста одновременно отправились 108-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час 48 минут раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

7.24 Два велосипедиста одновременно отправились 60-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 10 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

7.25 На изготовление 20 деталей первый рабочий тратит на один час меньше, чем второй рабочий на изготовление 18 таких же деталей. Известно, что второй рабочий за час делает на 1 деталь меньше, чем первый. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

7.26 На изготовление 40 деталей первый рабочий тратит на два часа больше, чем второй рабочий на изготовление 36 таких же деталей. Известно, что второй рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем первый. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

7.27 Сергей Александрович выехал с постоянной скоростью на двухколесном велосипеде из города А в город В, расстояние между которыми равно 45 км. На следующий день из А в В выехал Михаил Юрьевич. Так как он ехал на трехколесном велосипеде, то его скорость была на 3 км/ч больше. По дороге он сделал остановку на 45 мин, чтобы покормить хамелеона. В результате оказалось, что Михаил Юрьевич затратил на весь путь столько же времени, что и Сергей Александрович. Найдите скорость Михаила Юрьевича.

7.28 Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 400 литров она заполняет на 2 часа 20 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 900 литров?

7.29 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 48 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

7.30 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 21 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 120 км/ч, и через 45 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

7.31 Два мотоцикла стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются первый раз, если скорость одного на 15 км/ч больше скорости другого?

7.32 Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 12 ч раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 2 ч 30 мин после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

7.33 Расстояние между городами А и В равно 730 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 390 км от города А.

7.34 Для проведения ЕГЭ по математике было заготовлено 400 листов бумаги. Но так как на экзамен по болезни не явилось 20 человек, то на каждого экзаменуемого пришлось на 1 лист бумаги больше. Сколько листов бумаги было заготовлено на каждого экзаменуемого первоначально?

- 7.35 Для перевозки 60 т груза намечалось использовать несколько грузовиков. Из-за плохих погодных условий на каждый грузовик пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, а поэтому потребовалось дополнительно еще 4 машины. Какое количество грузовиков намечалось использовать первоначально?
- 7.36 Два поезда выходят одновременно из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 3,6 ч. За сколько часов каждый поезд проходит это расстояние, если один из них тратит на весь путь на 3 ч больше другого?
- 7.37 Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, выполнит это задание на 5 ч скорее, чем второй. За какое время выполнит это задание первый комбайн, работая один?
- 7.38 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 627 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения 4 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 4 суток после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
- 7.39 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 160 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается ровно через 20 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
- 7.40 Марина Георгиевна и Сергей Александрович, принимая вместе зачет по геометрии в 8 «АБВ» классе, могут справиться с этой работой за 1 час 12 минут. Марина Георгиевна, принимая зачет одна, затратит на это на 1 час меньше, чем один Сергей Александрович. За какое время примет зачет одна Марина Георгиевна?
- 7.41 Моторная лодка прошла против течения реки 60 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 45 минут меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
- 7.42 Моторная лодка прошла против течения реки 192 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
- 7.43 А) Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки 5 км/ч.
Б) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми 70 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в В оба теплохода прибыли одновременно.
- 7.44 Расстояние между городами А и В равно 100 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час вслед за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из С в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние АС.
- 7.45 Смешивается некоторое количество 72%-ного раствора кислоты и некоторое количество 58%-ого раствора этой же кислоты. И в результате получается 62%-ный раствор. Если бы каждого раствора было взято на 15 л больше, то получился бы 63,25%-

ный раствор. Сколько литров каждого раствора было взято для приготовления первой смеси?

7.46 Имелось два сплава, содержащих медь. В первом сплаве меди было 6 кг, а во втором – 12 кг. Процентное содержание меди в первом сплаве было на 40% меньше, чем во втором. После того, как их сплавляли вместе, получился новый сплав, содержащий 36% меди. Найдите массу каждого сплава.

7.47 В помощь садовому насосу, перекачивающему 8 литров воды в минуту, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 6 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 56 литров воды?

7.48 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 100 км. Отдохнув, он отправился обратно в А, увеличив скорость на 15 км/ч. По пути он сделал остановку на 6 часов, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

7.49 Дорога между пунктами А и В состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 22 км. Турист прошел путь из А в В за 4 часа, из которых спуск занял 3 часа. С какой скоростью турист шел на спуске, если его скорость на подъеме меньше скорости на спуске на 2 км/ч?

7.50 В сплав магния и алюминия, содержащий 22 кг алюминия, добавили 15 кг магния, после чего содержание магния в сплаве повысилось на 33%. Сколько весил сплав первоначально?

7.51 Имелось два слитка меди. Процент содержания меди в первом слитке был на 40% меньше, чем процент содержания меди во втором слитке. После того как оба слитка сплавляли, получили слиток, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в каждом слитке, если в первом слитке было 6 кг меди, а во втором – 12 кг.

7.52 В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

7.53 Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В и встречаются через полчаса. Продолжая движение, первый прибывает в В на 11 минут раньше, чем второй в А. За какое время преодолел расстояние АВ каждый пешеход?

7.54 Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся как 1 : 6. Найдите скорость движения каждой точки, если за 10 с точка, движущаяся по большей окружности, прошла на 2 м больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.

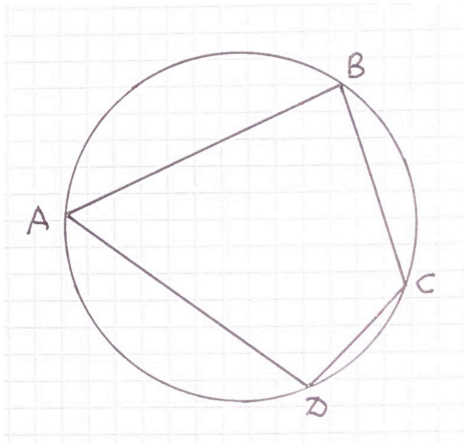
7.55 По окружности движутся два тела: первое тело проходит круг за 2 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности проходит каждое тело за 1 с?

Глава 8. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

8.1 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Теорема 1 Если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы противоположных его углов равны 180° .

Доказательство:



$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BCD, \angle BCD = \frac{1}{2} \cup BAD,$$

$$\angle BAC + \angle BCD = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD =$$

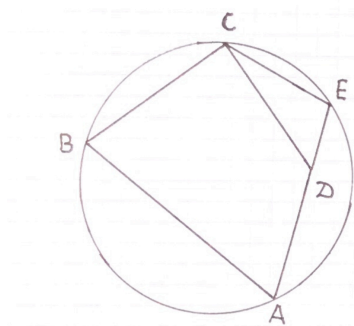
$$= \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD) = 180^\circ.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около такого четырехугольника можно описать окружность.

Доказательство:

Проведем окружность через точки A, B и C (Почему это всегда можно сделать?). Тогда точка D может оказаться внутри окружности, либо вне окружности, либо попасть на окружность. Докажем, что первые два случая невозможны.

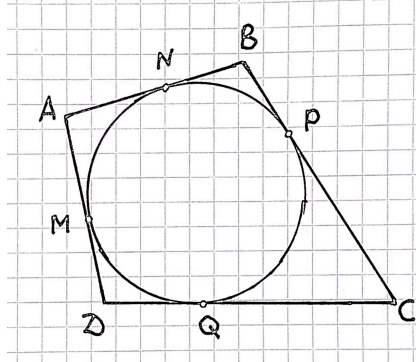


Пусть точка D лежит внутри окружности.

Продолжим сторону AD до пересечения с окружностью в точке E. Около четырехугольника ABCE описана окружность, а значит, по теореме 1, $\angle B + \angle E = 180^\circ$, но по условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$, откуда $\angle D = \angle E$, но это невозможно, т.к. в этом случае прямые CE и CD параллельны.

Аналогично доказывается, что точка D не может лежать вне окружности. Следовательно, точка D лежит на окружности и около четырехугольника ABCD можно описать окружность.

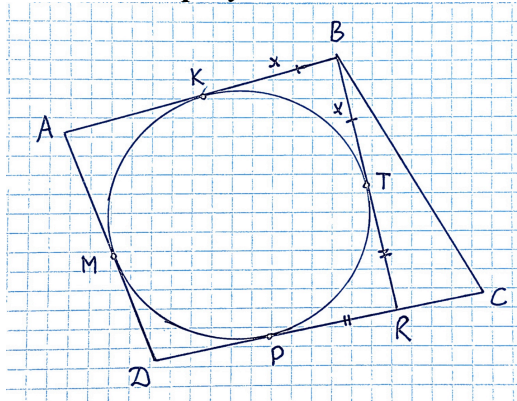
Теорема 3 Если в четырехугольник можно вписать окружность, то в таком четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



Доказательство:

Пусть M, N, P, Q – точки касания окружности со сторонами четырехугольника. Тогда по теореме об отрезках касательных, проведенных к окружности из одной точки $AM = AN$, $BN = BP$, $CP = CQ$ и $DM = DQ$. Учитывая, что $AB = AN + NB$, $DC = DQ + QC$, $AD = AM + MD$, $BC = BP + PC$, получаем, что $AB + CD = AD + BC$.

Теорема 4 Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в такой четырехугольник можно вписать окружность.



Доказательство:

Пусть четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB + CD = AD + BC$ (*).

Предположим, что в него нельзя вписать окружность. Проведем окружность, которая касается сторон AB , AD и BC (Докажите, что такая окружность всегда существует!). Пусть точки M , K , P – точки касания окружности со сторонами AD , AB и DC соответственно.

Пусть $KB = x$, а $PC = y$. Заметим, что $AK = AM$,

$MD = DP$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Тогда из равенства (*) следует, что $BC = x + y$ (**).

. Проведем касательную к окружности через точку B и пусть T – точка касания. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки $BT = BK = x$, а $PR = RT$. Но тогда

$PR + RC = TR + RC = y$, а значит, $BT + TR + RC = x + y$, а следовательно,

$BR + RC = x + y$. Учитывая (**), получаем таким образом, что в треугольнике BRC $BR + RC = BC$, что противоречит неравенству треугольника и, следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ можно вписать окружность. Теорема доказана.

8.2 ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

8.1 Докажите, что если в четырехугольнике диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.

8.2 Докажите, что если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырехугольник – параллелограмм.

8.3 Докажите, что если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то такой четырехугольник – параллелограмм.

8.4 Докажите, что если в четырехугольнике суммы углов, прилежащих к двум смежным сторонам равны по 180° , то такой четырехугольник – параллелограмм.

8.5 Докажите, что в параллелограмме:

А) противоположные стороны попарно равны;

Б) противоположные углы попарно равны;

В) сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180° ;

Г) отрезок с концами на сторонах, проходящий через точку пересечения диагоналей, делится точкой пересечения диагоналей пополам.

8.6 Докажите, что если в четырехугольнике любой отрезок, отличный от диагоналей, с концами на сторонах, проходящий через точку пересечения диагоналей, делится точкой пересечения диагоналей пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.

8.7 Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

8.8 Сторона параллелограмма втрое больше другой стороны, а его периметр равен 24. Найдите его стороны.

8.9 Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной a проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

8.10 Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки a и b . Найдите стороны параллелограмма.

8.11 Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равного 150° , равна двум и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите диагональ, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.

8.12 В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что ABCD – параллелограмм.

8.13 Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

8.14 Через центр параллелограмма ABCD проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая – стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырехугольник MNKL – параллелограмм.

8.15 Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC . Найдите углы параллелограмма.

8.16 Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B . Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и c соответственно. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D ?

8.17 Точки K , L , M и N – середины сторон соответственно AB , BC , CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL , BM , CN и DK – параллелограмм.

8.3 РОМБ

8.18 Докажите, что если в параллелограмме две смежные стороны равны, то такой параллелограмм – ромб.

8.19 Докажите, что если в четырехугольнике все стороны равны, то такой четырехугольник – ромб.

8.20 Докажите, что если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то такой параллелограмм – ромб.

8.21 Докажите, что если в параллелограмме одна из диагоналей делит угол параллелограмма пополам, то такой параллелограмм – ромб.

8.22 Докажите, что если в четырехугольнике диагонали являются биссектрисами его углов, то такой четырехугольник – ромб.

8.23 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен ее центр?

8.24 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.

8.25 Сторона ромба равна 8, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанной окружности.

8.27 Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 20° . Точки M и N – основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на стороны AD и CD . Найдите углы треугольника BMN .

8.28 Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый его угол равен 30° , а сторона равна 4.

8.29 Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60° . На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N , причем $AM = BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

8.4 ПРЯМОУГОЛЬНИК. КВАДРАТ.

8.30 Докажите, что если в параллелограмме один из углов равен 90° , то такой параллелограмм – прямоугольник.

8.31 Докажите, что если в четырехугольнике три угла равны 90° , то такой четырехугольник – прямоугольник

8.32 А) Докажите, что если в параллелограмме равны диагонали, то такой параллелограмм – прямоугольник.

Б) Докажите, что если в параллелограмме середина стороны равноудалена от вершин противоположащей стороны, то такой параллелограмм – прямоугольник.

8.33 Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен ее центр?

8.34 Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60° . Найдите меньшую сторону прямоугольника.

8.35 В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на два отрезка, равных 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

8.36 В круге на расстоянии 1 от центра даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них равна 6. На какие части одна хорда делит другую?

8.37 В круге радиуса R даны два взаимно перпендикулярных диаметра. Произвольная точка окружности спроектирована на эти диаметры. Найдите расстояние между проекциями точки.

8.38 Из точки, расположенной вне окружности, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные. Радиус окружности равен 10. Найдите длину каждой касательной.

8.41 На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ – ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

8.42 Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите большую сторону прямоугольника.

8.43 Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом 60° . Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.

8.44 Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника, не являющегося квадратом, при пересечении образуют квадрат.

8.5 СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

- 8.45 (Теорема Вариньона) Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
- 8.46 (Теорема о медианах треугольника) Докажите, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.
- 8.47 Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется ортоцентром треугольника).
- 8.48 Две стороны треугольника равны 10 и 12. Через середину третьей стороны, равной 11, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.
- 8.49 Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 10.
- 8.50 Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10.
- 8.51 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.
- 8.52 Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC , и медиана, проведенная из вершины A , делят друг друга пополам.
- 8.53 Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 24, а расстояние от точки B до прямой l равно 30. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .
- 8.54 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N – середины сторон AD, AB, BC и CD соответственно. Расстояние между точками K и L равно 6, а между точками K и N – 12. Найдите периметр четырехугольника $KLMN$.
- 8.55 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , равен 1. Найдите отрезок, соединяющий середины сторон BC и AD .
- 8.56 Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60° . На этой дуге взята точка M . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB , перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA .
- 8.57 Острый угол A ромба $ABCD$ равен 45° , проекция стороны AB на сторону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD .
- 8.58 Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.
- 8.59 Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC , если $\angle BAC = 30^\circ$.

- 8.60 Через точку A пересечения двух окружностей проведены диаметры AB и AC этих окружностей. Найдите BC , если расстояние между центрами этих окружностей равно a .
- 8.61 Сторона треугольника равна a . Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.
- 8.62 Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.
- 8.63 Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
- 8.64 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC . Найдите угол, образованный продолжением сторон AB и CD .
- 8.65 Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C . Найдите PM , если периметр треугольника ABC равен 10.
- 8.66 Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC . В каком отношении точка касания делит катет AC ?
- 8.67 Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 8.68 Точки M и N – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

8.6 ТРАПЕЦИЯ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ.

- 8.68 Докажите, что в равнобокой трапеции:
- А) высоты, проведенные из вершин меньшего основания, отсекают от большего основания равные отрезки;
 - Б) углы при каждом основании равны;
 - В) диагонали равны;
 - Г) высота, проведенная из вершины меньшего основания, отсекает от большего основания отрезок, равный средней линии;
 - Д) высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, а другой – полуразности.
- 8.69 Докажите, что если в трапеции высоты, проведенные из вершин меньшего основания, отсекают от большего основания равные отрезки, то такая трапеция – равнобокая.
- 8.70 Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то такая трапеция – равнобокая.
- 8.71 Докажите, что если диагонали трапеции равны, то такая трапеция – равнобокая.

- 8.72 Докажите, что если в трапеции высота, проведенная из вершины меньшего основания, отсекает от большего основания отрезок, равный средней линии, то такая трапеция – равнобокая.
- 8.73 Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120° , а большая боковая сторона равна c . Найдите разность оснований.
- 8.74 Найдите углы и стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон равнобокой трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом 40° .
- 8.75 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.
- 8.76 Высота равнобокой трапеции, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки 4 и 8. Найдите основания.
- 8.77 Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основания на отрезки, один из которых на 5 больше другого.
- 8.78 Боковая сторона равнобокой трапеции видна из точки пересечения диагоналей под углом 60° . Найдите диагонали трапеции, если ее высота равна h .
- 8.79 В равнобокой трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.
- 8.80 Диагональ равнобокой трапеции равна 10 и образует с основанием угол 60° . Найдите среднюю линию трапеции.
- 8.81 В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите среднюю линию трапеции.
- 8.82 Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.
- 8.83 Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании. Докажите, что второе ее основание равно сумме боковых сторон.
- 8.84 Сумма углов при одном основании трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полусумме.
- 8.85 Расстояние от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b . Найдите радиус окружности.
- 8.86 Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона равна средней линии.
- 8.87 Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
- 8.88 Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания 5 и 15. Прямая, проведенная через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

8.89 Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол 30° с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

8.90 Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

8.91 Дана трапеция ABCD с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D – в точке Q. Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

8.92 Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

8.93 Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.

8.94 Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

8.95 Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

8.96 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол 30° . Найдите среднюю линию трапеции.

8.97 Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

8.98 Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

8.99 Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.

8.7 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

8.100 Стороны параллелограмма равны a и b . Найдите диагонали четырехугольника, образованного при пересечении биссектрис

А) внутренних углов параллелограмма;

Б) внешних углов параллелограмма.

8.101 А) Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника ABCD равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 4$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 128° и 112° .

Б) Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника ABCD равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 7$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 96° и 144° .

8.102 А) Углы при одном из оснований трапеции равны 37° и 53° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 21 и 12. Найдите основания трапеции.

Б) Углы при одном из оснований трапеции равны 44° и 46° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 14 и 6. Найдите основания трапеции.

8.103 Четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если $BC = 1$.

8.104 В данном круге проведены две равные параллельные хорды, расстояние между которыми равно радиусу круга. Найдите острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

8.105 Найдите углы параллелограмма ABCD, если известно, что середина K стороны AB равноудалена от вершин C и D.

Глава 9. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

9.1 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

- 9.1 Два парохода одновременно вышли из порта, следуя один на север, а другой – на запад. Скорости их равны соответственно 16 км/ч и 30 км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними ровно через трое суток?
- 9.2 Стороны треугольника равны 10, 13, 13. Найдите медиану, проведенную к меньшей стороне.
- 9.3 Найдите медиану равностороннего треугольника со стороной a .
- 9.4 Высота равностороннего треугольника равна h . Найдите его сторону.
- 9.5 Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 5. Найдите медианы.
- 9.6 Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медианы.
- 9.7 Диагональ равнобокой трапеции равна d , а средняя линия равна m . Найдите высоту.
- 9.8 Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды, равной 12.
- 9.9 Прямая, проходящая через точку M , которая удалена от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A . Найдите AM .
- 9.10 Стороны треугольника равны 10, 17 и 24. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.
- 9.11 Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.
- 9.12 Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне равна $\sqrt{35}$, а основание равно 6. Найдите боковые стороны треугольника.
- 9.13 Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.
- 9.14 Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a , а боковая сторона равна b .
- 9.15 Высота ромба делит его сторону на отрезки 2 и 15. Найдите диагонали и высоту ромба.
- 9.16 Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите гипотенузу.
- 9.17 Найдите высоту трапеции со сторонами 10, 10, 10 и 26.

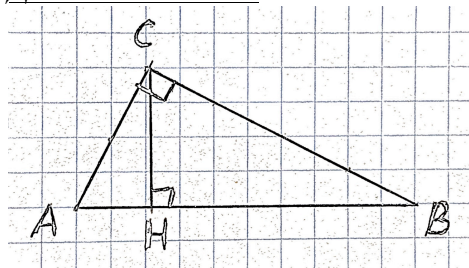
- 9.18 Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.
- 9.19 Найдите диагональ и боковую сторону равнобочной трапеции с основаниями 12 и 20, если известно, что центр ее описанной окружности лежит на большем основании.
- 9.20 Острые углы при основании трапеции равны соответственно 43° и 47° . Большая боковая сторона равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.
- 9.21 В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найдите катеты.
- 9.22 Основания равнобочной трапеции равны 1 и 2, а боковая сторона 1. Найдите диагонали.
- 9.23 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- 9.24 Большее основание прямоугольной трапеции вдвое больше меньшего ее основания, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.
- 9.25 Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой $\frac{4R}{3}$. Найдите остальные стороны трапеции.
- 9.26 На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки a и b . Найдите основание треугольника.
- 9.27 Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.
- 9.28 Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите стороны трапеции, если ее высота 12, а биссектрисы равны 15 и 13.
- 9.29 Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции равен 3, а углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите высоту трапеции.
- 9.30 Три окружности радиусов 1, 2, 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.
- 9.30 А) Выпуклый четырехугольник ABCD описан вокруг окружности с центром O, при этом $AO = OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найдите периметр четырехугольника ABCD.
 Б) Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник, причем одна вершина расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а две другие лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза треугольника равна a .
- В) На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны сторонам квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

9.2 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ.

ТЕОРЕМА.

1. В прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
2. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Доказательство:



Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C , CH – высота.

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\cos A = \frac{AC}{AB}$,
в прямоугольном треугольнике ACH $\cos A = \frac{AH}{AC}$.

Т.к. косинус угла зависит только от величины угла, то $\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$. Утверждение(1) доказано.

2. В прямоугольном треугольнике ACH $\operatorname{tg} A = \frac{CH}{AH}$,

в прямоугольном треугольнике HCB $\operatorname{tg} \angle HCB = \frac{HB}{CH}$. Т.к. $\angle CAH = \angle HCB$ и тангенс угла зависит только от величины угла, то $\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$. Утверждение(2) доказано.

Теорема доказана.

9.31 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 5$, $AB = 13$. Найдите BC , AH , CH , BH .

9.32 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $BC = 5$, $AB = 25$. Найдите AC , AH , CH , BH .

9.33 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 8$, $AB = 10$. Найдите BC , AH , CH , BH .

9.34 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 35$, $CB = 12$. Найдите AB , AH , CH , BH .

9.35 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 5$, $CB = 12$. Найдите AB , AH , CH , BH .

9.36 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 10$, $CB = 24$. Найдите AB , AH , CH , BH .

9.37 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 6$, $AH = 3,6$. Найдите AB , BC , CH , BH .

- 9.38 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 6$, $BH = 9$. Найдите AB , AH , BC , CH .
- 9.39 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AB = 10$, $BH = 6,4$. Найдите AC , AH , CH , BC .
- 9.40 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 9$, $BH = 16$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.41 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 2$, $BH = 18$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.42 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 1,5$, $BH = 2\frac{2}{3}$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.43 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 6$, $CH = 4,8$. Найдите AB , BC , AH , BH .
- 9.44 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 8$, $CH = 4,8$. Найдите AB , BC , AH , BH .
- 9.45 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 6$, $CH = 4,8$. Найдите AB , BC , AH , BH .
- 9.46 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AB = 10$, $CH = 4,8$. Найдите AC , BC , AH , BH .
- 9.47 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 9$, $BH = 4$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.48 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 24$, $BH = 1$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.49 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $BH = 12$, $CH = 6$. Найдите AH , AB , BC , AC .
- 9.50 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = \sqrt{6}$, $BH = 1$. Найдите AB , AH , BC , CH .
- 9.51 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = \sqrt{3}$, $BH = 2$. Найдите AB , AH , BC , CH .
- 9.52 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AC = 4$, $BH = 3$. Найдите AB , AH , BC , CH .
- 9.53 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH – высота. $AH = 3$, $BH = 12$. Найдите AB , BC , AC , CH .
- 9.54 Высота трапеции делит большее основание на отрезки 1 и 9. Найдите высоту, стороны и диагонали трапеции, если известно, что центр описанной около этой трапеции окружности лежит на большем ее основании.

9.55 Перпендикуляр, проведенный из точки окружности к ее диаметру, делит диаметр на отрезки 2 и 18. Найдите расстояние от этой точки до концов диаметра и длину перпендикуляра.

9.56 Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B , пересекаются в точке M . Найдите хорду AB , если отрезок MO делится ею на отрезки 2 и 18.

9.57 Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B , пересекаются в точке M . Найдите хорду AB , если отрезок MO делится ею на отрезки 2 и 18.

9.58 Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите периметр треугольника.

9.59 Окружность, вписанная в трапецию, делит одну из ее боковых сторон на отрезки 2 и 18. Найдите радиус окружности.

9.60 На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $BC = a$ и $AC = b$.

9.61 В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность отсекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC .

9.3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ.

9.62 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = \sqrt{11}$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.63 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 1$, $BC = 5$. Найдите $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$.

9.64 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$. Найдите $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$.

9.65 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 3$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.66 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\sin A = 0,6$. Найдите $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.67 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.68 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.69 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\cos A = \frac{1}{5}$. Найдите $\sin A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.70 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\cos A = \frac{\sqrt{11}}{6}$. Найдите $\sin A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.71 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\cos A = 0,9$. Найдите $\sin A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.72 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.73 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.74 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{tg} A = \sqrt{5}$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{ctg} A$.

9.75 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{ctg} A = \sqrt{10}$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

9.76 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{ctg} A = 6$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

9.77 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ $\operatorname{ctg} A = \frac{2}{7}$. Найдите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

9.78 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 6$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AC , BC .

9.79 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 42$, $\sin B = \frac{3}{7}$. Найдите AC , BC .

9.80 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $\sin B = 0,6$. Найдите AB , BC .

9.81 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $\sin A = 0,8$. Найдите AC , AB .

9.82 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $\cos A = 0,2$. Найдите AC , BC .

9.83 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 15$, $\cos B = 0,6$. Найдите AC , BC .

9.84 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $\cos A = 0,3$. Найдите AB , BC .

9.85 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 10$, $\cos B = 0,2$. Найдите AB , AC .

9.86 В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $\cos A = 0,6$. Найдите BC .

9.87 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 20$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AC , AB .

9.88 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 20$, $\operatorname{tg} B = \frac{2}{3}$. Найдите AC , AB .

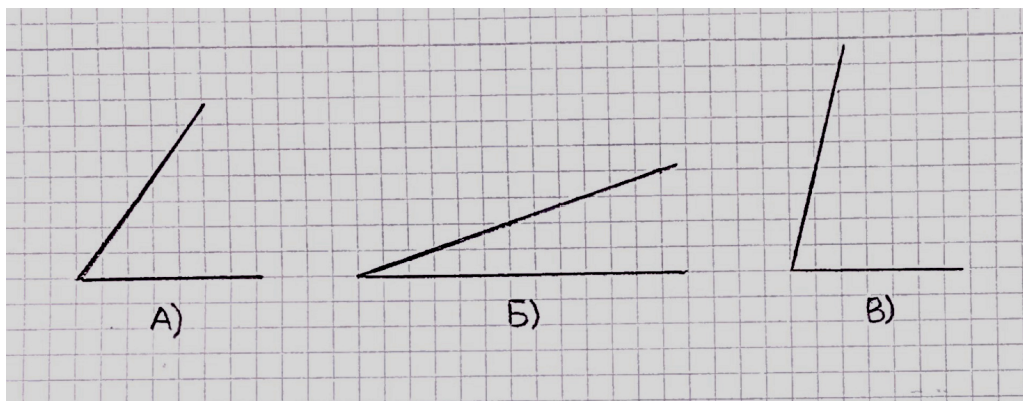
9.89 В треугольнике ABC $AB = BC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите AC .

9.90 В треугольнике ABC $AB = BC = 3$, $\cos A = \frac{2}{3}$. Найдите AC .

9.91 В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $\sin A = 0,4$. Найдите AC .

- 9.92 В треугольнике ABC $AB = BC = 6$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AC.
- 9.93 В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $\sin A = 0,2$. Найдите BC.
- 9.94 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите AB, BC.
- 9.95 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 2$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите AB, BC.
- 9.96 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 6$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AB, BC.
- 9.97 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите AB, BC.
- 9.98 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = \sqrt{10}$, $\operatorname{tg} A = \sqrt{2}$. Найдите AB, BC.
- 9.99 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\operatorname{tg} A = 0,2$. Найдите AB, BC.
- 9.100 В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $\operatorname{tg} A = 4$. Найдите AC.
- 9.101 В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $\operatorname{tg} A = 0,25$. Найдите AC.
- 9.102 В треугольнике ABC $AB = BC = 15$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AC.
- 9.103 В параллелограмме ABCD CH – высота, $AB = 4$, $\cos C = 0,8$. Найдите CH.
- 9.104 Высота треугольника равна 10 и образует с прилежащими сторонами углы 45° и 60° . Найдите стороны треугольника.
- 9.105 Радиус окружности, вписанной в ромб равен R , а острый угол ромба равен α . Найдите сторону ромба.
- 9.106 Радиус вписанной в ромб ABCD окружности равен 2, а $\operatorname{tg} C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найдите стороны ромба.
- 9.107 ABCD – ромб, $AB = 8$, $\cos C = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите радиус вписанного в этот ромб круга.
- 9.108 ABCD – равнобокая трапеция ($AD \parallel BC$), MN – средняя линия, $MN = 5$, $\angle ABD = 90^\circ$. Найдите диагонали и высоту трапеции, если известно, что диагональ составляет с основанием угол, синус которого равен $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
- 9.110 Сторона треугольника равна 2, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны.
- 9.111 Меньшее основание равнобокой трапеции равно a , а диагональ трапеции является биссектрисой острого угла, равного α . Найдите большее основание и высоту трапеции.

- 9.112 Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$, а высота, проведенная к основанию, равна h . Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.
- 9.113 Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B – точки касания). Найдите радиус окружности, если $AB = a$, $\angle AMB = \alpha$.
- 9.114 Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол α . Найдите расстояние от точки C до диаметра AB .
- 9.115 В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC ; сумма острых углов A и C равна 90° . Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны AB и CD .
- 9.116 Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ равна a и образует с основанием AD и боковой стороной AB углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.
- 9.117 В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 21, а катет BC равен 28. Окружность с центром на гипотенузе AB касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.
- 9.118. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс углов, изображенных на рисунке:



9.4 ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

- 9.119 Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a .
- 9.120 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.121 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $BC = 5$, $AC = 12$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.122 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $BC = \sqrt{11}$, $AC = 5$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

- 9.123 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $AB = \sqrt{17}$, $AC = 1$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.124 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $AB = 5$, $AC = 2$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.125 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$; $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.126 В треугольнике ABC $AB = BC = AC = 2$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.127 В треугольнике ABC $AB = BC = AC = a$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.128 В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $AC = 8$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.129 В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 6$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.130 В треугольнике ABC $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.131 В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $AC = 14$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.132 В треугольнике ABC $AB = BC = 12$, $AC = 22$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.133 В треугольнике ABC $AB = BC = 21$, $AC = 40$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
- 9.134 Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R , а угол при основании равен α . Найдите стороны треугольника.
-

9.5 ЗАДАЧИ ИЗ СБОРНИКА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА

- 9.135 А) Середина диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 4. Найдите стороны $ABCD$, если $AC = 20$.
Б) Середина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 8. Найдите стороны $ABCD$, если $BD = 20$
- 9.136 А) В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC . Сумма острых углов A и C равна 90° . Найдите длину большей диагонали, если $AD = 2$, $BC = 5$.
Б) В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD , равная 5, перпендикулярна основаниям AD и BC . Сумма острых углов A и C равна 90° . Найдите длину меньшего основания, если большая диагональ равна 13.
В) В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ AC перпендикулярна основаниям AD и BC . Сумма острых углов B и D равна 90° . Найдите боковые стороны трапеции, если $AD = 4$, $BC = 9$.

- 9.137 А) В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки 4 и 6. Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.
- Б) В окружности проведены на расстоянии 2 от центра две взаимно перпендикулярные хорды, длина каждой из них 8. На какие части точка пересечения хорд делит каждую из них?
- В) В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Одна из хорд удалена от центра на расстояние 8, другая – на расстояние 6. На какое расстояние удалена от центра точка пересечения хорд?

9.6 ЗАДАЧИ ИЗ ИПС «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ» Р. К. ГОРДИНА

- 9.138 В большей из двух концентрических окружностей проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшей окружности. Найдите радиус каждой из окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8.
- 9.139 Около трапеции ABCD с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4. Найдите стороны трапеции и ее высоту.
- 9.140 В треугольнике ABC $AB = BC = 6$, На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 2 : 1$. Найдите AC.
- 9.141 Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 2 и является хордой некоторой окружности. Катет AC равен 1 и лежит внутри окружности, а его продолжение пересекает окружность в точке M, причем $CM = 3$. Найдите радиус окружности.
- 9.142 Около окружности с диаметром 15 описана равнобокая трапеция с боковой стороной 17. Найдите основания трапеции.
- 9.143 Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.
- 9.144 Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Найдите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.
- 9.145 Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 и 12.
- 9.146 Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности, равная 2, удалена от центра на расстояние, равное 3.
- 9.147 Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке K, а продолжение стороны BC – в точке E, причем $AB = AC = CK = 2$, $CE = \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности.

9.148 Стороны треугольника относятся как $5 : 4 : 3$. Найдите отношение отрезков сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

9.150 Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD . Основание BC равно 4. Найдите высоту и боковые стороны трапеции.

9.151 На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $AD : BD = 1 : 3$. Высота, опущенная из вершины с прямого угла на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC .

9.152 В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R . Верхнее основание трапеции вдвое меньше ее высоты. Найдите стороны трапеции.

9.153 В равнобокую трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Найдите диагональ трапеции.

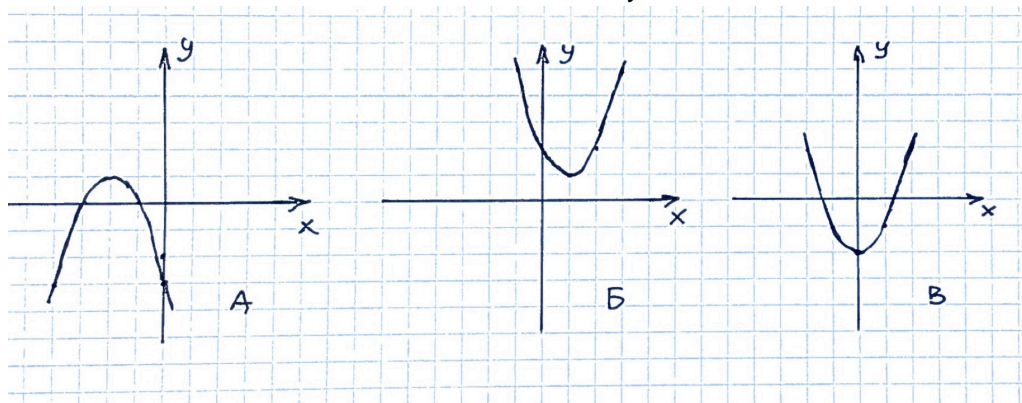
9.154 Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма, если его стороны равны a и b . (Определите синус угла).

9.155 Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A . Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A , пересекается с другой общей касательной в точке B . Найдите радиус второй окружности, если $AB = 4$.

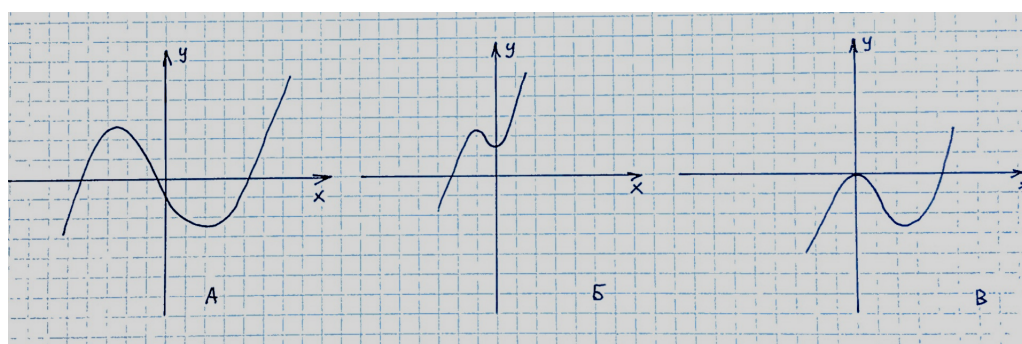
9.156 Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом 120° . Найдите среднюю линию трапеции.

Глава 10. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

10.1 На рисунке изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знак c .



10.2 На рисунке изображен график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Определите знак c .



10.1 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) + a$.

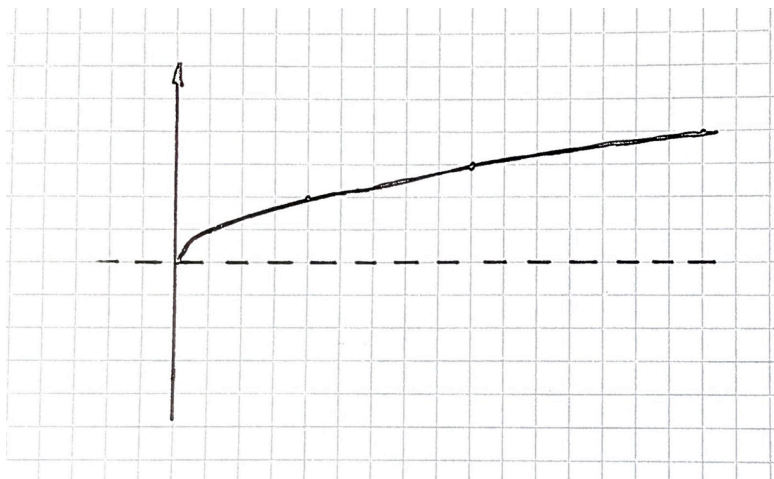
Рассмотрим

Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt{x} + 1$. Попробуем понять, как получить график этой функции из графика функции $y = \sqrt{x}$.

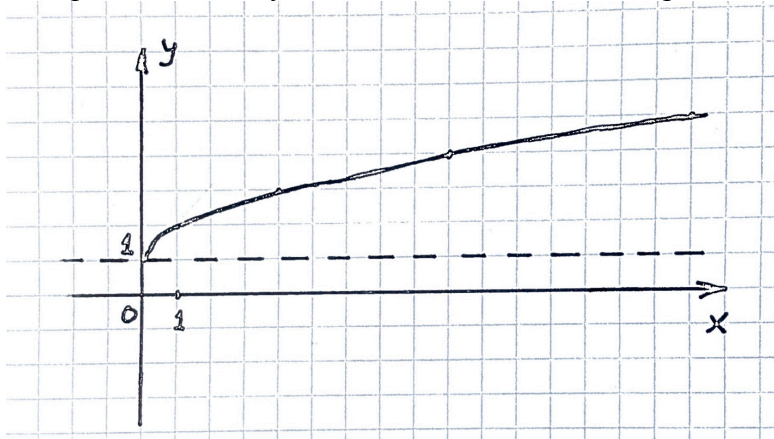
Заполним таблицу:

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} + 1$	1	2	3	4	5

Мы видим, что значения функции $y = \sqrt{x} + 1$ больше соответствующих значений функции $y = \sqrt{x}$ на 1. Таким образом, график функции $y = \sqrt{x} + 1$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси y на 1 вверх. Но график сдвигать неудобно, гораздо проще вместо этого опустить ось x на 1 вниз. Теперь осталось построить график. Сначала построим график $y = \sqrt{x}$. Т.к. мы будем двигать ось x , то начертим ее сначала пунктиром.



Теперь осталось опустить ось x на 1 вниз и начертить «нормальную» систему координат.

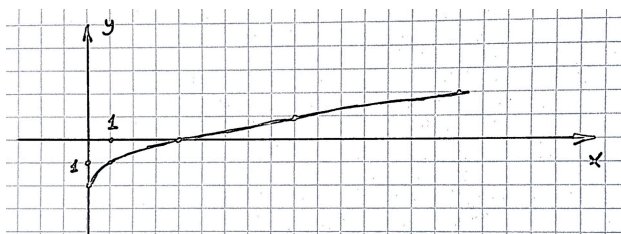


Пример 2. Построить график функции $y = \sqrt{x} - 2$.

Заполним таблицу:

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	0	1	2

Нетрудно заметить, что все значения функции $y = \sqrt{x} - 2$ меньше соответствующих значений функции $y = \sqrt{x}$ на 2. Следовательно, график функции $y = \sqrt{x} - 2$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси y на 2 единицы вниз, или, что проще, можно поднять ось x на 2 единицы вверх. Построим график. Сначала построим график $y = \sqrt{x}$. Т.к. мы будем двигать ось x , то начертим ее сначала пунктиром (см. предыдущий пример) Теперь осталось поднять ось x на 2 вверх и начертить ось абсцисс.



Для того, чтобы построить график функции $y = f(x) + a$, нужно график функции $y = f(x)$ поднять на a единиц вверх, если $a > 0$ и опустить на $|a|$ единиц вниз, если $a < 0$.

10.2 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x - a)$.

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{x - 2}$.

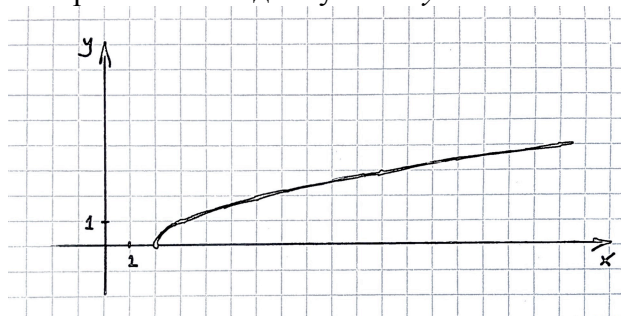
Заполним таблицы:

$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
x	0	1	4	9	16

$y = \sqrt{x - 2}$	0	1	2	3	4
x	2	3	6	11	18

Мы видим, что значения функции $y = \sqrt{x - 2}$ принимаются на 2 единицы «позже», чем соответствующие значения функции $y = \sqrt{x}$: так, значение 0 функция $y = \sqrt{x - 2}$ принимает при $x = 2$, а функция $y = \sqrt{x}$ значение 0 принимает при $x = 0$. Можно заметить, что график функции $y = \sqrt{x - 2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси x на 2 единицы вправо, но мы договорились, что вместо этого сдвинем ось y на 2 единицы влево. Строим. Начинаем с графика $y = \sqrt{x}$. Т.к. мы будем двигать ось y , то начертим ее сначала пунктиром (см. пример 1).

Теперь осталось сдвинуть ось y на 2 влево и начертить ось ординат.



Пример 4. Построить график функции $y = \sqrt{x + 1}$.

Заполним таблицы:

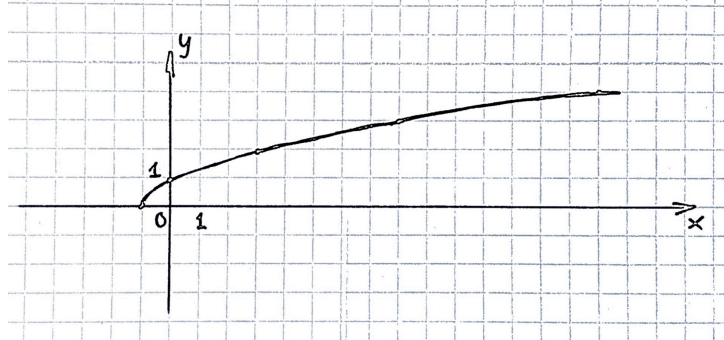
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
x	0	1	4	9	16

$y = \sqrt{x + 1}$	0	1	2	3	4
x	-1	0	3	8	15

Мы видим, что значения функции $y = \sqrt{x + 1}$ принимаются на 1 единицу «раньше», чем соответствующие значения функции $y = \sqrt{x}$: так, значение 0 функция $y = \sqrt{x + 1}$ принимает при $x = -1$, а функция $y = \sqrt{x}$ значение 0 принимает при $x = 0$. Заметим, что график функции $y = \sqrt{x + 1}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси x на 1 единицу влево, ну а ось y мы, соответственно, сдвинем вправо на 1 единицу.

Строим. Опять начинаем с графика $y = \sqrt{x}$. Т.к. мы будем двигать ось y , то начертим ее сначала пунктиром.

Теперь осталось сдвинуть ось y на 1 вправо и начертить ось ординат:



Для того, чтобы построить график функции $y = f(x - a)$, нужно график функции $y = f(x)$ сдвинуть на a единиц вправо, если $a > 0$ и на $|a|$ влево, если $a < 0$.

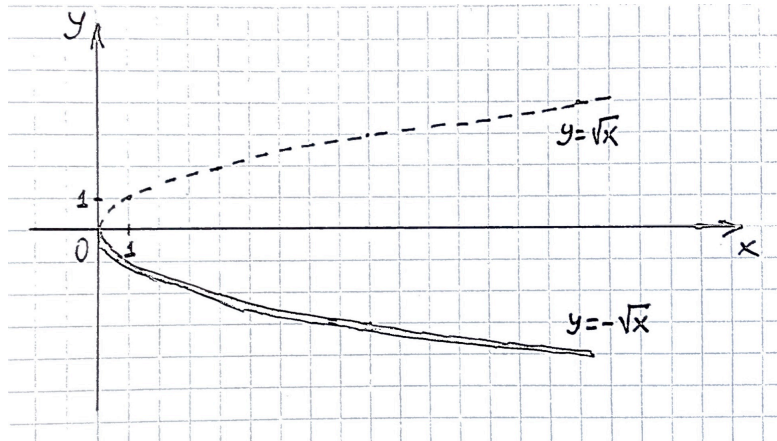
10.3 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -f(x)$.

Пример 5. Построить график функции $y = -\sqrt{x}$.

Заполним таблицу:

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = -\sqrt{x}$	0	-1	-2	-3	-4

Заметим, что соответствующие значения этих функций противоположны, а следовательно, графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс и, значит, для построения графика функции $y = -\sqrt{x}$ нужно график функции $y = \sqrt{x}$ отразить симметрично относительно оси x :



Для того, чтобы построить график функции $y = -f(x)$, нужно график функции $y = f(x)$ отразить симметрично относительно оси абсцисс.

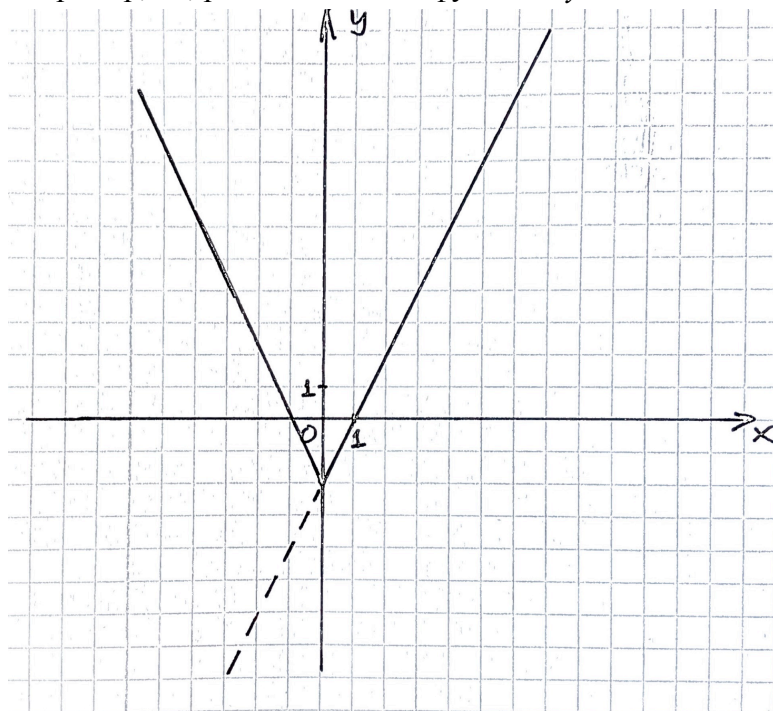
10.4 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$.

Пример 6. Построить график функции $y = 2|x| - 2$.

И опять заполним таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x - 2$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2 x - 2$	4	2	0	-2	0	2	3	4

Обратите внимание, что если $x \geq 0$, то соответствующие значения функций $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$ совпадают, а если $x < 0$, то значения функции $y = f(|x|)$ равны значениям функции $y = f(x)$ в симметричных точках, т.е. значение функции $y = 2|x| - 2$ в точке, например, -3, равно значению функции $y = 2x - 2$ в точке 3.



Для того, чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую правее(а точнее, не левее!) оси ординат оставить без изменений и отразить ее симметрично относительно оси ординат, выкинув при этом часть графика функции $y = f(x)$ расположенную левее оси ординат.

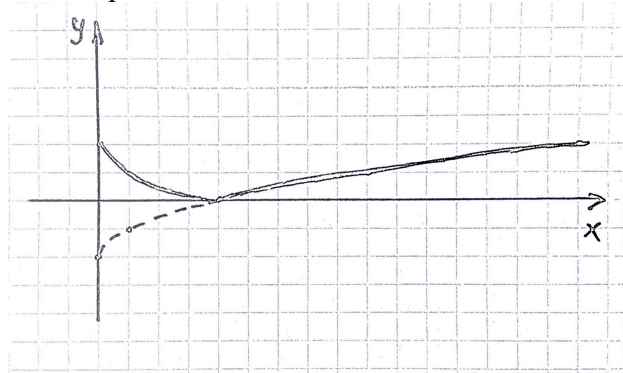
10.5 КАК ПОЛУЧИТЬ ИЗ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$.

Пример 6. Построить график функции $y = |\sqrt{x} - 2|$.

Заполним таблицу:

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	0	1	2
$y = \sqrt{x} - 2 $	2	1	0	1	2

Мы видим, что если $\sqrt{x} - 2 \geq 0$, то значения функций $y = \sqrt{x} - 2$ и $y = |\sqrt{x} - 2|$ совпадают, а если $\sqrt{x} - 2 < 0$, то значения функций $y = \sqrt{x} - 2$ и $y = |\sqrt{x} - 2|$ противоположны. Таким образом, для построения графика $y = |\sqrt{x} - 2|$, мы должны сохранить ту часть графика функции $y = \sqrt{x} - 2$, которая лежит выше (а точнее, не ниже!) оси x , а ту часть графика $y = \sqrt{x} - 2$, которая располагается ниже оси x , отразить симметрично относительно оси абсцисс:



Для того, чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую выше (а точнее, не ниже!) оси абсцисс оставить без изменений, а ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс, отразить симметрично относительно оси абсцисс.

10.1 Постройте график функции:

- А) $y = \sqrt{x} + 3$; Б) $y = \sqrt{x} + 5$; В) $y = \sqrt{x} - 6$; Г) $y = \sqrt{x} - 7$; Д) $y = x^2 + 4$; Е) $y = x^2 + 1$;
 Ё) $y = x^2 - 5$; Ж) $y = x^2 - 3$; З) $y = \frac{4}{x} + 1$; И) $y = -\frac{6}{x} + 4$; Й) $y = -\frac{12}{x} - 4$; К) $y = \frac{2}{x} - 3$.

10.2 Постройте график функции:

- А) $y = \sqrt{x + 4}$; Б) $y = \sqrt{x + 9}$; В) $y = \sqrt{x - 3}$; Г) $y = \sqrt{x - 5}$; Д) $y = (x + 1)^2$; Е) $y = (x + 3)^2$;
 Ё) $y = (x - 2)^2$; Ж) $y = (x - 5)^2$; З) $y = \frac{8}{x + 2}$; И) $y = \frac{2}{x + 4}$; Й) $y = \frac{6}{x - 5}$; К) $y = \frac{12}{x - 4}$.

10.3 Постройте график функции:

- А) $y = \sqrt{x + 1} + 4$; Б) $y = \sqrt{x + 4} + 1$; В) $y = \sqrt{x - 3} + 2$; Г) $y = \sqrt{x - 5} + 4$; Д) $y = \sqrt{x + 3} - 2$;
 Е) $y = \sqrt{x + 1} - 5$; Ё) $y = \sqrt{x - 9} - 1$; Ж) $y = \sqrt{x - 4} - 2$; З) $y = (x + 3)^2 + 2$;
 И) $y = (x + 2)^2 + 3$; Й) $y = (x - 5)^2 + 1$; К) $y = (x - 2)^2 + 3$; Л) $y = (x + 2)^2 - 1$;
 М) $y = (x + 1)^2 - 2$; Н) $y = (x - 3)^2 - 1$; О) $y = (x - 4)^2 - 2$; П) $y = \frac{4}{x + 1} + 2$; Р) $y = \frac{8}{x + 2} + 1$;
 С) $y = \frac{2}{x - 4} + 1$; Т) $y = \frac{6}{x - 1} + 3$; У) $y = \frac{4}{x + 1} - 5$; Ф) $y = \frac{8}{x + 4} - 2$;
 Х) $y = \frac{12}{x - 5} - 1$; Ц) $y = \frac{2}{x - 1} - 4$.

10.4 Постройте графики функций $y = \frac{8}{|x|}$ и $y = \left| \frac{8}{x} \right|$.

10.5 Постройте график функции:

- А) $y = |\sqrt{x+1} - 3|$; Б) $y = |\sqrt{x-5} - 3|$; В) $y = |\sqrt{x-2} - 1|$; Г) $y = |\sqrt{x+4} - 3|$;
Д) $y = |(x-2)^2 - 1|$; Е) $y = |(x-3)^2 - 2|$; Ё) $y = |(x+1)^2 - 2|$; Ж) $y = |(x+4)^2 - 1|$;
З) $y = \left| \frac{4}{x-1} - 2 \right|$; И) $y = \left| \frac{6}{x-2} - 1 \right|$; Й) $y = \left| \frac{8}{x+2} - 1 \right|$; К) $y = \left| \frac{2}{x+1} - 4 \right|$;
Л) $y = \left| \frac{2}{x-1} + 1 \right|$; М) $y = \left| \frac{4}{x-3} + 2 \right|$; Н) $y = \left| \frac{12}{x+1} + 2 \right|$; О) $y = \left| \frac{8}{x+2} + 3 \right|$.

10.6 Постройте график функции:

- А) $y = \sqrt{|x|-1}$; Б) $y = \sqrt{|x|-4}$; В) $y = \sqrt{|x|+4}$; Г) $y = \sqrt{|x|+1}$;
Д) $y = (|x|-3)^2$; Е) $y = (|x|-2)^2$; Ё) $y = (|x|+5)^2$; Ж) $y = (|x|+1)^2$;
З) $y = \frac{4}{|x|-1}$; И) $y = \frac{6}{|x|-3}$; Й) $y = \frac{8}{|x|+1}$; К) $y = \frac{12}{|x|+3}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ГОРОДСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа по вероятности и статистике. 8 класс
Выдавать работу будет преподаватель на сайте <http://matgrad.scd.edu.ru>

Вариант 1

1 На диаграмме (см. рис.) показано распределение численности населения Центрального административного округа Москвы по районам (муниципальным образованиям).



- а) В каких двух районах численность населения наименьшая?
б) Сравните численность населения районов «Красносельский» и «Басманный». В каком из этих районов больше жителей?
в) Всего в Центральном округе проживает примерно 760 тыс. человек. Найдите приблизительно, сколько всего жителей в трёх районах: «Замоскворецкий», «Мещанский» и «Тверской».

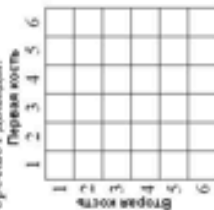
2 В таблице дано число крупных землевладельцев (7–9 баллов), случившихся на Земле в первом десятилетии XXI века.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Число крупных землевладельцев	16	12	15	16	11	10	18	12	17	23

- а) Найдите среднее арифметическое числа крупных землевладельцев за десять лет.
б) Какие два года больше всего отличаются от среднего показателя по числу крупных землевладельцев?
в) Найдите дисперсию числа крупных землевладельцев за первые пять лет десятилетия.
г) Какое из следующих утверждений является наиболее правдоподобным?
А В 2012 году крупных землевладельцев будет меньше 5.
Б В 2012 году число крупных землевладельцев будет в пределах от 5 до 50.
В В 2012 году крупных землевладельцев будет более 50.

3 У Вэри есть пуговицы четырёх разных цветов. Вэри хочет пришить к левому рукаву блузки пуговицу какого-нибудь цвета, а к правому – пуговицу другого цвета. Сколько всего у Вэри есть комбинаций для выбора?

4 Правильную игральную кость бросают дважды.



- а) Отметьте в таблице (см. рис.) все элементарные события этого эксперимента, благоприятствующие событию $A = \{\text{хотя бы один раз выпало число, большее 4}\}$.
б) Найдите вероятность события A .

5 В некоторой стране в среднем на 9 пращей приходится 1 леша. Случайно выбирают двух людей. Найдите вероятность того, что:

- а) первый из выбранных людей окажется лешей;
б) первый окажется пращой, а второй – лешей.

зачем бы один раз выпало число, большее 4

6 В магазине осталось десять одинаковых с виду шоколадных яиц «Киндерсюрприз» с сюрпризами внутри. В шести яйцах спрятали робота, а в оставшихся – автомобильчик. Сергей коллекционирует автомобильчики, и поэтому он купил три яйца.

- а) Найдите вероятность события

$$B = \{\text{все три подарка – автомобилики}\}.$$

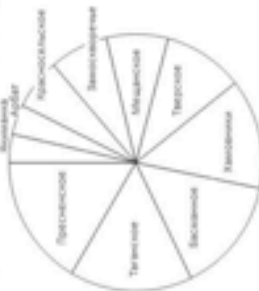
- б) Можно ли считать событие B маловероятным? Обсудите своё мнение.

Контрольная работа по вероятности и статистике. 8 класс

Видеореплика работы будет производиться на сайте <http://zadachabank.edu.ru>

Вариант 2

1. На диаграмме (см. рис.) показано распределение численности населения Центрального административного округа Москвы по районам (муниципальным образованиям).



а) Какие четыре района наибольшие по численности населения?
б) Сравните численность населения в районах «Мещинское» и «Тверское». В каком из этих районов жителей больше?
в) Всего в Центральном округе проживает примерно 760 тыс. человек. Найдите приблизительно, сколько всего жителей в четырех районах: «Арбат», «Космодемьянский», «Замоскворецкий» и «Мещинское».

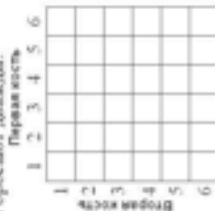
2. В таблице дано число крупных землетрясений (7–9 баллов), случившихся на Земле в первом десятилетии XXI века.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Число крупных землетрясений	16	12	15	16	11	10	18	12	17	23

а) Найдите медиану числа крупных землетрясений за десять лет.
б) В какие три года этого десятилетия число землетрясений менее всего отличалось от среднего?
в) Найдите дисперсию числа крупных землетрясений за последние пять лет десятилетия.
г) Какие из следующих утверждений наиболее правдоподобно?
А. В 2012 году крупных землетрясений будет меньше 5.
Б. В 2012 году крупных землетрясений будет больше 50.
В. В 2012 году крупных землетрясений будет в пределах от 5 до 50.

3. В мастерской, где шьют байдарки, имеются ткани пяти разных цветов. Завскачек хочет, чтобы левые байдарики были одного цвета, а верхи (деки) – другого. Сколько всего у заказчика есть комбинаций для выбора?

4. Правильную игральную кость бросают дважды.



а) Отметьте в таблице (см. рис.) все элементарные события этого эксперимента, благоприятствующие событию

$$A = \{\text{оба раза выпало число, большее 2}\}.$$

б) Найдите вероятность события A .

5. В некоторой стране в среднем на 9 правителей приходится 1 левша. Случайно выбирают двух людей. Найдите вероятность того, что:

а) первый из выбранных людей окажется правшой;
б) оба выбранных окажутся правшами.

6. В магазине осталось девять одинаковых с виду пакетов чая с подарками внутри. В пяти пакетах спрятаны магниты, а в остальных – чайные ложки. Лена купила три пакета чая и надеется, что во всех пакетах окажутся ложки.

а) Найдите вероятность события

$$C = \{\text{все три подарка – ложки}\}.$$

б) Можно ли считать событие C маловероятным? Обоснуйте своё мнение.

Диагностическая работа по вероятности и статистике. 8 класс

Вариант 1

1. На диаграмме показано распределение числа клиентов между различными сетями операторов России, включая четыре крупнейших оператора (по данным некоторого опроса, в котором участвовали клиенты, пользующиеся услугами только одной компании).



а) Укажите номера верных утверждений.

1. Клиентов компании МТС меньше, чем клиентов компании Теле-2.
 2. Клиентов компании Билайн меньше, чем четверть всех участников опроса.
 3. Клиенты компаний Мегафон и Билайн, вместе взятые, составляют примерно половину всех клиентов.
 4. Общее число клиентов компаний Билайн и Теле-2 превосходит число клиентов МТС.
 5. Клиентов компаний МТС и Мегафон, вместе взятых, менее половины всех участников опроса.
 6. Клиентов компании Теле-2 – около четверти всех участников опроса.
- б) Найдите примерное количество клиентов компании Мегафон, участвовавших в опросе, если всего было опрошено 3600 человек.
2. В таблице даны сведения о пунктах продаж 5 компаний сотовой связи в некотором городе (по данным некоторого последования).

Компания	Альфа	Бета	Гамма	Дельта	Эпсилон
Количество пунктов продаж услуг в городе	8	7	6	10	4

Найдите:

- а) среднее число пунктов продаж услуг на одну компанию;
- б) дисперсию числа пунктов продаж услуг.

3. На Новый Год встретились пятеро друзей. Каждый показал всем другим руки, и каждый подарил всем другим по подарку.

- а) Сколько всего было подарков?
- б) Сколько всего было рукопожатий?

4. Правильную игральную кость бросают дважды.

- а) Отметьте в таблице все элементарные события этого эксперимента, благоприятствующие событию

$$A = \{\text{сумма выпавших очков делится на 5}\}.$$

- б) Найдите вероятность события A .

	Первая кость					
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

5. Сказочные животные шерстки бывают трёх возможных окрасов: серые, бурые и мадиновые. В среднем из 100 шерсток бывает 13 серых и 57 бурых. Найдите вероятность того, что случайно взятый шерёк будет мадиновым.

6. В банке стоят три платёжных автомата. Каждый из автоматов может оказаться неисправен независимо от других с вероятностью 0,1.

- а) Найдите вероятность события

$$C = \{\text{все три автомата исправны}\}.$$

- б) По вашему мнению, каким следует считать событие C : практически достоверным, вполне возможным или маловероятным? Обоснуйте своё мнение.

Диагностическая работа по вероятности и статистике. 8 класс**Вариант 2**

1. На диаграмме показано распределение числа клиентов между различными сетевыми операторами. Россия, включая четыре крупнейших оператора (по данным некоторого опроса, в котором участвовали клиенты, пользующиеся услугами только одной компании).



а) Укажите номера верных утверждений.

1. Клиентов компании МТС больше, чем клиентов компании Билайн.
 2. Клиентов компании МТС больше, чем клиентов компаний Билайн и Теле-2 вместе взятых.
 3. Клиенты компании Билайн составляют примерно четвертую часть всех участников опроса.
 4. Клиентов компании МТС меньше, чем четверть всех участников опроса.
 5. Участников опроса, не включенных клиентами компаний Билайн или Мегафон, – примерно половина от общего количества.
 6. Число клиентов компании Мегафон не меньше, чем число клиентов компании МТС.
- б) Найдите среднее количество участников опроса, если известно, что в опросе участвовало 800 клиентов компании Билайн.

2. В таблице даны сведения о 5 компаниях сотовой связи (по данным некоторого исследования).

Компания	Альфа	Бета	Гамма	Дельта	Эпсилон
Количество сотрудников, принятых на работу в течение месяца	8	7	9	11	5

Найдите:

- а) среднее число сотрудников, принятых на работу в течение месяца, на одну компанию;
 - б) дисперсию этой величины.
3. На Новый Год встретился шестеро друзей. Каждый пожал всем другим руки, и каждый подарил всем другим по подарку.
- а) Сколько всего было подарков?
 - б) Сколько всего было рукопожатий?

4. Правильную игральную кость бросают дважды.

а) Отметьте в таблице все элементарные события этого эксперимента, благоприятствующие событию

$$A = \{\text{сумма выпавших очков делится на 6}\}.$$

б) Найдите вероятность события A .

	Первая кость					
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

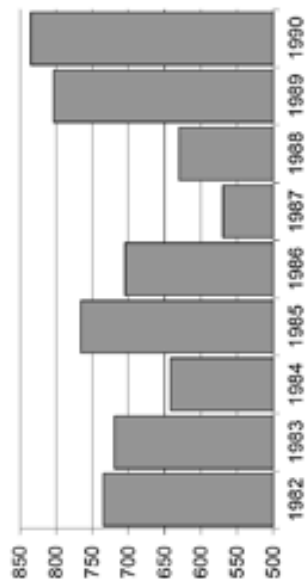
5. Скотские животные мышки бьются с двумя, тремя и четырьмя хвостами. В среднем из 100 мышишек бывает 28 с двумя хвостами и 62 – с тремя. Найдите вероятность того, что у случайно выбранного мышишки окажется четыре хвоста.

6. В банке стоят три платёжных автомата. Каждый из автоматов может оказаться неисправен независимо от других с вероятностью 0,3.

а) Найдите вероятность события $C = \{\text{все три автомата неисправны}\}$.

б) По вашему мнению, каким следует считать событие C : практически достоверным, вполне возможным или маловероятным? Объясните свой ответ.

1. На диаграмме показано годовое количество осадков в Москве за период с 1982 г. по 1990 г. По вертикали отмечено годовое количество осадков (в мм).



а) За сколько лет приведены данные на диаграмме?

б) Укажите номера верных утверждений.

- 1) Самый «сухой» год из данного периода – 1987 год.
- 2) За 1985 год осадков вышло больше, чем за предыдущий год.
- 3) В 1988 году осадков вышло примерно в два раза больше, чем в 1987 году.

2. Пользуясь диаграммой из задания 1:

а) найдите приблизительно медиану набора данных (количества осадков в мм);
 б) перечислите годы, когда количество осадков отличалось от медианы менее чем на 30 мм;

в) найдите приблизительно среднее арифметическое количества осадков, выпавших за 1983 и 1984 годы.

3. Правильную натуральную степень бросают два раза. Рассмотрим событие A {В первый раз выпало в два раза больше очков, чем во второй раз}.

Первый бросок		1	2	3	4	5	6
Второй бросок	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

а) В таблице элементарных исходов этого эксперимента (см. рис.) отметьте все исходы, благоприятствующие событию A .

б) Найдите вероятность события A .

4. На листе бумаги изображена окружность случайного радиуса. Эксперимент состоит в измерении радиуса R этой окружности. Рассмотрим три события:

$$A = \{R > 3 \text{ см}\}, B = \{R > 8 \text{ см}\} \text{ и } C = \{R > 5,5 \text{ см}\}.$$

Расположите эти события в порядке возрастания их вероятностей.

5. День, когда в городе отключают зимнее отопление, зависит от температуры воздуха на улице. В таблице даны средние суточные температуры воздуха в этом городе в конце апреля.

Дата	Средняя суточная температура (°C)	Дата	Средняя суточная температура (°C)
15 апреля	12,7	23 апреля	10,1
16 апреля	19,4	24 апреля	11,7
17 апреля	15,6	25 апреля	16,5
18 апреля	11,8	26 апреля	16,2
19 апреля	9,2	27 апреля	16,7
20 апреля	7,0	28 апреля	17,1
21 апреля	6,2	29 апреля	12,8
22 апреля	4,5	30 апреля	13,3

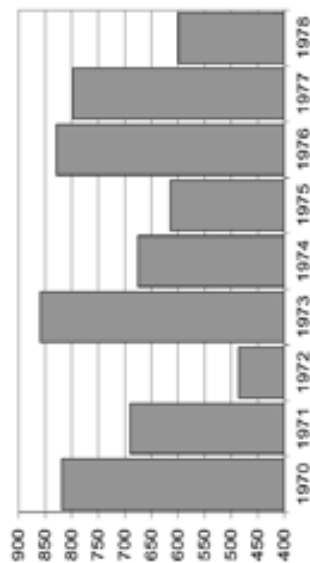
а) **Выбрано правило:** отопление отключают не раньше 25 апреля, если каждый день в течение пяти предыдущих дней средняя суточная температура воздуха была выше +8°C. Какого числа следует отключить отопление, если следовать этому правилу?

б) **Предположим, что выбрано другое правило:** отопление отключают не раньше 25 апреля, если средняя температура воздуха за пять предыдущих дней оказалась выше +8°C. Какого числа в этом случае следует выключить отопление?

в) Объясните, почему по первому правилу отопление всегда придётся отключать не раньше, чем по второму.

6. Два мальчика и семь девочек в случайном порядке сядут за круглый стол на девять стульев. Найдите вероятность того, что мальчики окажутся на соседних стульях.

1. На диаграмме показано годовое количество осадков в Москве за период с 1970 г. по 1978 г. По вертикали отмечено годовое количество осадков (в мм).



а) За сколько лет приведены данные на диаграмме?

б) Укажите номера верных утверждений.

- 1) За 1971 год осадков выпало больше, чем за последующий год.
- 2) В 1978 году осадков выпало примерно в два раза меньше, чем в 1977 году.
- 3) Самый «влажный» год из данного периода – 1973 год.

2. Пользуясь диаграммой из задания 1:

- а) найдите приближённо медиану набора данных (количества осадков в мм);
- б) пересчитайте годы, когда количество осадков отличалось от медианы менее чем на 50 мм;
- в) найдите приблизительно среднее арифметическое количества осадков, выпавших за 1970 и 1971 годы.

3. Правильную игральную кость бросают два раза. Рассмотрим событие A (B первый раз выпало на 2 очка меньше, чем во второй раз).

Первый бросок

1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Второй бросок

а) В таблице элементарных исходов этого эксперимента (см. рис.) отметьте все исходы, благоприятствующие событию A .

б) Найдите вероятность события A .

4. На листе бумаги изображён случайный квадрат. Случайный эксперимент состоит в измерении диагонали d этого квадрата. Рассмотрим в этом эксперименте три события:

$$A = \{d < 8 \text{ см}\}, B = \{d \leq 9,3 \text{ см}\} \text{ и } C = \{d < 7 \text{ см}\}.$$

Расположите эти события в порядке возрастания их вероятностей.

5. День, когда в городе отключают зимнее отопление, зависит от температуры воздуха на улице. В таблице даны средние суточные температуры воздуха в этом городе в конце апреля.

Дата	Средняя суточная температура (°C)	Дата	Средняя суточная температура (°C)
15 апреля	8,3	23 апреля	5,5
16 апреля	12,7	24 апреля	11,1
17 апреля	19,4	25 апреля	12,7
18 апреля	15,6	26 апреля	17,5
19 апреля	11,8	27 апреля	17,2
20 апреля	9,2	28 апреля	17,7
21 апреля	8,0	29 апреля	18,1
22 апреля	7,2	30 апреля	13,8

а) **Выбрано правило:** отопление отключают не раньше 24 апреля, если каждый день в течение пяти предыдущих дней средняя суточная температура воздуха была выше +9°C. Какого числа следует отключить отопление, если следовать этому правилу?

б) **Предположим, что выбрано другое правило:** отопление отключают не раньше 24 апреля, если средняя температура воздуха за пять предыдущих дней оказалась выше +9°C. Какого числа в этом случае следует выключить отопление?

в) Объясните, почему по второму правилу отопление всегда придётся отключать не позже, чем по первому.

6. Пять мальчиков и две девочки в случайном порядке садятся за круглый стол на семь стульев. Найдите вероятность того, что девочки окажутся на соседних стульях.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ

8 класс (на один урок)
Сентябрь 2012 г.
Для учащихся, обучающихся по учебнику Ю.Н. Макарычева и др.
Вариант 1.

1 При каких значениях переменной дробное выражение не имеет смысла:

а) $\frac{a-3}{x-3}$; б) $\frac{x(x-4)}{x^2+4x}$

2 Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а.) $(3x - 2y)(2y + 3x)$; б.) $(a - 4)^2 - 3a(a - 3)$.

3. Разложите на множители:

а.) $5a + 5b + c(a + b)$; б.) $a^2 + a^2 - 9a - 9$; в.) $9b^2 - (b + 3)^2$.

4. Дана функция $y = 3 - 5x$.

- а.) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -1 ;
б) найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное -10 .

5 Туристы 5 ч ехали на автомобиле и 8 ч на поезде. За это время они проделали путь в 1160 км. Какова скорость автомобиля, если она на 15 км/ч меньше скорости поезда?

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ

8 класс (на один урок)
Сентябрь 2012 г.
Для учащихся, обучающихся по учебнику Ю.Н. Макарычева и др.
Вариант 2.

1 При каких значениях переменной дробное выражение не имеет смысла:

а) $\frac{10x}{x+5}$; б) $\frac{x(x+4)}{2x^2-8x}$?

2. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(2b + 3a)(3a - 2b)$; б) $3a(a - 3) - (a - 4)^2$.

3. Разложите на множители:

а) $3a - 3b - c(a - b)$; б) $a^4 - a^3 - 4a + 4$; в) $25b^2 - (5 - b)^2$.

4. Дана функция $y = \frac{1}{5}x + 3$.

- а) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -5 ;
б) найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное -2 .

5. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 54 км, и встретились через 5 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если известно, что второй прошёл до встречи на 4 км меньше первого?

2. АДМИНИСТРАТИВНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ 2012/13 уч. год

Вариант 1

1. Решите уравнение:

А) $7x = 3,5x^2$

Б) $3x^2 - 14x + 15 = 0$

В) $\sqrt{1-4x} = 9$

Г) $\frac{x^2-12}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 1$

Д) $(x^2 - x - 5)(x^2 - x + 6) = 12$

2. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

3. При каких значениях переменной x определено выражение $\frac{2}{\sqrt{6,6-0,3x}} - \sqrt{2x+17}$?

4. Упростите выражение $\left(\frac{x}{xy-y^2} + \frac{y}{xy-x^2}\right) : \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right)$ и найдите его значение при $x = 0,57$, $y = -0,07$.

5. Сократите дробь $\frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$.

6. Найдите значение выражения:

А) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} - \frac{2}{\sqrt{5}+3}\right) \cdot (11 - \sqrt{5})$

Б) $7^{-2} + (0,14)^{-1} - \left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$

В) $\frac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

А) $2,1x = 0,7x^2$

Б) $3x^2 + x - 10 = 0$

В) $\sqrt{6-2x} = 4$

Г) $\frac{x^2-3}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} = 1$

Д) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 4$

2. Два велосипедиста одновременно отправились в 182-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

3. При каких значениях переменной x определено выражение $\sqrt{9,9-1,1x} - \frac{3}{\sqrt{2x+10}}$

4. Упростите выражение $\left(\frac{b}{a^2-ab} - \frac{a}{b^2-ab}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right)$ и найдите его значение при $a = 0,5$, $b = -1$.

5. Сократите дробь $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}$.

6. Найдите значение выражения:

А) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-3} - \frac{1}{\sqrt{7}+3}\right) \cdot (2\sqrt{7}-10)$

Б) $9^{-2} + (0,18)^{-1} - \left(-1\frac{4}{5}\right)^{-2}$

В) $\frac{(-8)^{-12} \cdot 4^5}{16^{-4} \cdot 2^{-7}}$

3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ГЕОМЕТРИИ

1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма.
2. Параллелограмм. Признаки параллелограмма.
3. Прямоугольник. Свойства прямоугольника.
4. Прямоугольник. Признак прямоугольника.
5. Ромб. Свойства ромба.
6. Ромб. Признаки ромба.
7. Квадрат и его свойства.
8. Теорема Фалеса.
9. Теорема о средней линии треугольника.
10. Трапеция. Теорема о средней линии трапеции.
11. Равнобокая трапеция и ее свойства.
12. Признаки равнобокой трапеции.

Задачи к зачету.

Задачи первого уровня.

1. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b . Найдите стороны параллелограмма.
2. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом в 60° . Найдите меньшую сторону прямоугольника.
3. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.
4. Диагональ делит угол прямоугольника в отношении 2:7. Найдите углы между диагоналями данного прямоугольника.
5. Диагонали ромба образуют с его стороной углы, один из которых на 50° меньше другого. Найдите углы ромба.
6. Углы, образованные при пересечении диагоналей прямоугольника, относятся как 2:7. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами данного прямоугольника.
7. Сторона ромба образует с его диагоналями углы, один из которых в 4 раза больше другого. Найдите углы ромба.
8. В треугольнике MPK угол M – прямой и $MP=MK$. На сторонах MP , PK , MK отмечены точки A , B , C соответственно так, что $MABC$ является квадратом, $AC=a$. Найдите PK .
9. Диагональ AC делит прямоугольную трапецию $ABCD$ (углы A и B – прямые) на два треугольника – прямоугольный и равносторонний. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание равно 12 см.
10. В треугольнике ABC с прямым углом B , $AB=BC$. На сторонах AB и BC взяты точки M и P , а на стороне AC – точки K и H так, что четырехугольник $MPHK$ является квадратом, со стороной $MP=a$. Найдите AC .
11. В равнобокой трапеции с острым углом 60° биссектриса этого угла делит меньшее основание, равное 16 см, пополам. Найдите среднюю линию трапеции.
12. По одну сторону от прямой a отмечены точки C и D . Середина отрезка CD отстоит от данной прямой на 12 см. Найдите расстояние от точек C и D до данной прямой, если точка C находится вдвое дальше от прямой, чем точка D .
13. В равнобокой трапеции с тупым углом 120° биссектриса этого угла делит большее основание, равное 16 см пополам. Найдите среднюю линию трапеции.

14. Полупериметр параллелограмма равен 26 см, а сумма двух сторон – 22 см. Найдите стороны параллелограмма.
15. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен 125° . Найдите углы параллелограмма.
16. В ромбе $MPHK$ диагонали пересекаются в точке O . На сторонах MK , KH , PH взяты точки A , B , C соответственно, $AK=KB=PC$. Докажите, что $OA=OB$, и найдите сумму углов POC и MOA .
17. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45° . Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.
18. В ромбе $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей, OM , OK , OE – перпендикуляры, опущенные на стороны AB , BC , CD соответственно. Докажите, что $OM=OK$, и найдите сумму углов MOB и COE .
19. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60° . Большая боковая сторона и большее основание равны по 20 см. Найдите меньшее основание.
20. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A диагонали пересекаются в точке O . На отрезках AO и OC взяты точки P и K соответственно, $OP=OD$, $OK=OB$. Докажите, что четырехугольник $PBKD$ является прямоугольником.
21. В трапеции $MHPK$ MK – большее основание. Прямые MH и PK пересекаются в точке E , угол MEK равен 80° , а угол ENP – 40° . Найдите углы трапеции.
22. В трапеции $ABCD$ BC – меньшее основание. На отрезке AD взята точка E так, что прямые BE и CD параллельны и угол ABE равен 70° , а угол BEA равен 50° . Найдите углы трапеции.
23. Диагональ равнобокой трапеции с основаниями 4 см и 10 см является биссектрисой тупого угла трапеции. Найдите периметр трапеции.
24. Разность противоположных углов равнобокой трапеции равна 20° . Найдите углы трапеции.
25. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки BK и KC . Найдите периметр параллелограмма, если известно, что $AB=4$ см и BK в два раза меньше KC .
26. В параллелограмме $ABCD$ BK – биссектриса угла ABC , $K \in AD$. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если угол BKA равен 50° .
27. В четырехугольнике $MPKH$ углы PMK и HKM равны и $PK \parallel MH$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны PK и MH в точках A и B соответственно. Докажите, что $AP=HB$.
28. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^{\circ}$, $AB \parallel CD$. На сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $BM=KD$. Докажите, что точки M и K находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения диагоналей четырехугольника.
29. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с боковой стороной угол в 120° . Боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.
30. В четырехугольнике $ABCD$ BD – диагональ. Углы ABD и CBD – равны, угол A равен углу C . Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.
31. В треугольнике ABC точка E – середина стороны AB . $\angle B=58^{\circ}$, $\angle C=32^{\circ}$, $EF \perp AB$ (точка F лежит на стороне BC). Докажите, что $BF=FC$.
32. В параллелограмме $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей. Периметр треугольника AOB равен 17 см, $BC=9$ см, $CD=6$ см. Найдите периметр треугольника AOD .
33. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
34. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.
35. Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами другого квадрата.
36. Вершинами какой фигуры являются середины сторон равнобедренной трапеции? Обоснуйте ответ.

37. Докажите, что параллелограмм, у которого углы равны, а диагонали перпендикулярны, является квадратом.
38. Докажите, что параллелограмм, у которого стороны равны и диагонали равны, является квадратом
39. В треугольнике ABC точка E – середина стороны CB . $\angle A = \angle EDB$ (точка D лежит на стороне AB). Докажите, что $AD = DB$.
40. Основания прямоугольной трапеции равны 8 и 6 см, а один из углов равен 45° . Найдите меньшую боковую сторону трапеции.
41. Диагональ равнобокой трапеции с основаниями 8 см и 5 см является биссектрисой острого угла трапеции. Найдите периметр трапеции.
42. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла DCA перпендикулярна стороне AD . Найдите углы ромба.
43. Высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, образуют угол 30° и равны соответственно 6 см и 10 см. Найдите стороны параллелограмма.
44. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересеклись на стороне BC . Как относятся длины соседних сторон параллелограмма?
45. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 3 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите диагональ, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.
46. Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18 см. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.
47. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.
48. В равнобокой трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.
49. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 см и образует угол, равный 60° , с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.
50. Стороны треугольника относятся как 7:8:11. Периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 52 см. Найдите стороны данного треугольника.

Задачи второго уровня.

1. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника провели прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Чему равен периметр получившегося четырехугольника, если боковая сторона треугольника равна a ?
2. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.
3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC взяты точки K и E соответственно так, что $\angle KBE = 90^\circ$ и отрезок EK проходит через точку O пересечения диагоналей. Докажите, что $BO = OE$.
4. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит ее среднюю линию пополам.
5. В параллелограмме $ABCD$ через точку O – пересечения диагоналей – проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и E соответственно, $BO = OE$. Найдите угол KBE .
6. В ромбе $ABCD$ угол B тупой. На стороне AD взята точка K , $BK \perp AD$. Прямые BK и AC пересекаются в точке O , $AC = 2BK$. Найдите угол AOB .
7. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол в 60° . Докажите, что меньшая диагональ равна полусумме оснований трапеции.

8. Из вершины тупого угла равнобокой трапеции $ABCD$ проведен перпендикуляр CE к прямой AD , содержащей большее основание. Докажите, что $AE = 1/2(AD + BC)$.
9. Из вершины прямого угла меньшего основания прямоугольной трапеции под углом 45° к этому основанию проведен луч, который проходит через середину большей боковой стороны. Докажите, что меньшая боковая сторона этой трапеции равна сумме оснований.
10. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая, параллельная двум его сторонам. Докажите, что эта прямая проходит через середины двух других сторон параллелограмма.
11. Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через точку пересечения его диагоналей.
12. Три стороны трапеции равны между собой, а ее диагональ равна одному из оснований. Найдите углы трапеции.
13. На сторонах параллелограмма $MPKH$ взяты точки A и B соответственно, $MP = PB = AK$, $\angle MPB = 60^\circ$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки BM и AN .
14. Диагональ делит равнобокую трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.
15. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K , $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30^\circ$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки AM и CK .
16. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6 см.
17. Точки A и B принадлежат соответственно сторонам PE и ET треугольника PET . Прямая, проходящая через вершину T вне треугольника, пересекает луч AB в точке K , $AP = KT$, $AB = BK = 1/2PT$. Докажите, что точка A является серединой отрезка PE .
18. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC . Через вершину C вне треугольника проведена прямая, параллельная AB и пересекающая луч MK в точке E . Докажите, что $KE = 1/2AC$.
19. В прямоугольнике $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей, BH и DE – высоты треугольников ABO и COD соответственно, $\angle BOH = 60^\circ$, $AN = 5$ см. Найдите OE .
20. В прямоугольнике $MPKH$ O – точка пересечения диагоналей, PA и NB – перпендикуляры, проведенные из вершин P и N к прямой MK . Известно, что $MA = OB$. Найдите угол POM .
21. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CN (N лежит между M и C). Докажите, что $BNDM$ – ромб.
22. Биссектрисы двух углов прямоугольника делят его сторону на части, каждая из которых равна 3 см. Найдите периметр прямоугольника. Сколько решений имеет задача?
23. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CN ($A \in MC$, $C \in AN$). Докажите, что $BNDM$ – ромб.
24. В прямоугольной трапеции острый угол и угол, который составляет меньшая диагональ с меньшим основанием, равны по 60° . Найдите отношение оснований.
25. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, острый угол равен 45° . Найдите отношение оснований.
26. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A образует с диагональю BD углы, один из которых равен 105° . Найдите угол между диагоналями прямоугольника.
27. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла ABD проходит через середину стороны AD . Найдите углы ромба.
28. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Найдите углы ромба.

29. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит прямой угол в отношении 3:1. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.
30. Основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении 3:1. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны, если диагональ равна 8 см.
31. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB=BM=6$. Найдите наибольшую сторону прямоугольника.
32. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если угол ромба равен 30° , а сторона равна 4.
33. Две средние линии треугольника равны между собой и взаимно перпендикулярны. Найдите градусные меры углов треугольника.
34. На сторонах квадрата $ABCD$ от вершин B и D отложены равные отрезки BK , BM , DN и DP . Докажите, что точки K , M , N и P являются вершинами прямоугольника.
35. Средняя линия данной трапеции делит её на две трапеции, средние линии которых равны 10 и 18. Найдите основания данной трапеции.
36. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.
37. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, у которой две стороны равны 1, а еще одна сторона равна 2 (рассмотрите все возможные случаи).
38. Может ли диагональ трапеции разделить пополам ее среднюю линию? (Ответ обоснуйте)
39. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равные 11 и 35. Найдите углы трапеции.
40. Найдите стороны и углы параллелограмма, если его периметр равен 40 см, а высота параллелограмма и биссектриса его угла, проведенные из одной вершины, делят сторону параллелограмма на три равных отрезка.
41. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.
42. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.
43. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме боковых сторон.
44. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.
45. Вершины M и N равнобедренного треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что MN параллельно AC .

Задачи третьего уровня

1. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника делит его сторону на части, одна из которых в два раза больше другой. На какие части диагональ прямоугольника делит его угол?
2. Докажите, что если в равнобокой трапеции высота равна средней линии, то диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.
3. Докажите, что если в равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии.

4. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.
5. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырех углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника. Найдите длины диагоналей этого прямоугольника, если a и b длины сторон параллелограмма.
6. Стороны параллелограмма a и b . Найдите, диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис внешних углов параллелограмма.
7. Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.
8. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.
9. Сторона треугольника равна a . Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.
10. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.
11. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
12. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
13. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (теорема об ортоцентре).
14. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.
15. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата равны.