

1. Упростите выражения:

а) $\left(\frac{1}{3+9x} - \frac{1-x}{27x^3+1} : \frac{1-3x}{9x^2-3x+1} \right) \cdot \frac{9x+3}{3x-1};$

б) $\left(\frac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-2} - \frac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3} - 2 + \sqrt{19} \right) (2 - \sqrt{13}).$

2. Решите уравнение $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 1680.$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80, \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56. \end{cases}$

4. После смешения двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой 20 г безводного йодистого калия, получили 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго.

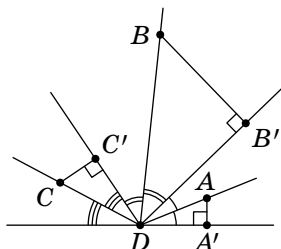
5. Решите неравенство $\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \leq \frac{8x+1}{x}.$

6. Угадайте формулу для суммы

$$\frac{1 \cdot 2^1}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^3}{5!} + \dots + \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!},$$

а потом докажете её по индукции.

7. Дано: $DA' + DC' = DB'.$ Докажите, что $ABCD$ вписанный.



8. Сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма их кубов тоже делится на 6.

9. а) Вдоль прямой улицы в ряд растут 30 лип. Сколькими способами можно вырубить 12 лип так, чтобы в их число не попали никакие две липы, стоящие рядом?
б) А если липы растут по кругу?

10. Рассмотрим многочлен $f(x) = (x^3 - 2x - 2)^{11} - 2022.$

а) Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-2.$

б) Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - x - 2.$

в) Найдите $f'(x).$

г) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1.$

д) Найдите угол между этой касательной и прямой $5x = 6y.$

11. Рассмотрим функцию $y = 2x^3 + 3x^2.$

а) Исследуйте функцию на монотонность. Укажите промежутки монотонности, точки экстремума, значения функции в точках экстремума.

б) Постройте график функции в масштабе 1 ед. = 4 кл.

в) Напишите уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}.$ Постройте эту касательную.

г) Некоторые касательные к графику этой функции параллельны прямой $y = 12x + 5782.$ Найдите координаты точек касания. Запишите уравнения этих касательных.

12. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x = 2, x = 4, y = x^2, y = 0.$

а) Найдите площадь этой трапеции.

б) Найдите такое значение $a,$ при котором прямая $x = a$ делит эту трапецию на две равновеликие фигуры.

в) Найдите объём тела, полученного вращением данной трапеции вокруг оси абсцисс.

г) Найдите объём тела, полученного вращением данной трапеции вокруг оси ординат.

13. Тележки A и B связаны верёвкой длиной 33 футов, которая проходит по шкиву P (см. рис.), закреплённому на высоте 12 футов. Тележка A движется с постоянной скоростью 2 фут/с. Чему равна скорость тележки B в момент, когда тележка A находится в 5 футах от Q ?

